Aufgabenblatt 2 **Modal- und Temporallogik SS 2001**
Schroeder-Heister

1. Ordnen Sie die Begriffe *notwendig*, *möglich*, *unmöglich* und *nicht notwendig* in Form eines logischen Quadrats an, so daß die Diagonalen den kontradiktorischen Gegensatz, die obere waagerechte Linie den konträren Gegensatz (*nicht beide wahr*), die untere waagerechte Linie den subkonträren Gegensatz (*nicht beide falsch*) und die beiden vertikalen Linien ein Verhältnis der Subordination andeuten. Welche Bedingung muß man an die Erreichbarkeitsrelation stellen, damit das Quadrat die geforderten Eigenschaften hat? (Diese Eigenschaft korrespondiert der Nichtleerheit von Begriffen in der Syllogistik.) **3P.**

2. Zeigen Sie:

$\langle W, R\rangle \models A \to \Box\Diamond A \quad \Rightarrow \quad R$ ist symmetrisch **2P.**

3. Zeigen Sie:

$\Diamond A \models_{sym+trans} \Box\Diamond A$ **2P.**

4. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{ll} \Diamond A \models_{äq} \Box\Diamond A & \Box\Diamond A \models_{äq} \Diamond A \\ \Diamond A \models_{äq} \Diamond\Diamond A & \Diamond\Diamond A \models_{äq} \Diamond A \\ \Box A \models_{äq} \Diamond\Box A & \Diamond\Box A \models_{äq} \Box A \\ \Box A \models_{äq} \Box\Box A & \Box\Box A \models_{äq} \Box A \end{array}$$

4P.

5. Zeigen Sie:

Eine euklidische reflexive Relation ist eine Äquivalenzrelation.

(R *euklidisch* bedeutet $\forall u \forall v \forall w : uRv \;\&\; uRw \;\Rightarrow\; vRw$) **1P.**

5. (Zusatzaufgabe) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß *nicht* gilt:

$\mathfrak{M} \models \Box A \to A \;\Rightarrow\; \mathfrak{M}$ beruht auf einem reflexiven Rahmen. **2P.**

6. (Zusatzaufgabe) Zeigen Sie :

$\langle W, R\rangle \models \Diamond A \to \Box\Diamond A \;\Leftrightarrow\; R$ euklidisch **2P.**

7. (Zusatzaufgabe) Sei $\langle W, R_1, R_2\rangle$ ein bimodaler Rahmen, d.h. ein Rahmen mit zwei Erreichbarkeitsrelationen. Sei eine bimodale Logik gegeben, d.h. eine Logik mit jeweils zwei Notwendigkeits- und Möglichkeitsoperatoren, wobei $\Box_1$ und $\Diamond_1$ durch R_1 und $\Box_2$ und $\Diamond_2$ durch R_2 interpretiert werden. Welche Anforderungen an R_1 und R_2 sind gleichwertig damit, daß folgendes gilt (Begründung!):

$\langle W, R\rangle \models A \to \Box_2\Diamond_1 A \qquad \langle W, R\rangle \models A \to \Box_1\Diamond_2 A.$ **2P.**