Universität Tübingen, WSI
Prof. Dr. P. Schroeder-Heister

Sommersemester 2004
Übungsblatt 1

Übungen zur Vorlesung λ-Kalkül und kombinatorische Logik

Aufgabe 1 [1+2+2+3+2]

Geben Sie alle Teilterme, freien und gebundenen Variablen der folgenden λ-Terme an.

(a) $\lambda y.z$

(b) $(\lambda y.yy)(\lambda x.xx)$

(c) $(\lambda yx.xy)((\lambda z.z)y)(\lambda xz.x)$

(d) $(\lambda xyz.xz)((\lambda zy.yy)z)((zz)(zz))(\lambda x.xx)$

(e) $(\lambda y.x)[y/x]$

Aufgabe 2 [6]

Beweisen Sie *mit Induktion über Termaufbau* die folgende Aussage:

$$\text{Für alle } \lambda\text{-Terme } M \text{ gilt: } |FV(M)| \leq lgh(M).$$

Dabei sei $lgh(M)$ die Anzahl der Zeichen, aus denen der Term M besteht.

Bemerkung: Die Aussage ist offensichtlich trivial; Ziel dieser Aufgabe ist es, einen sauberen Beweis über Termaufbau zu führen.

Aufgabe 3 [2+2+ (4 Zusatzpunkte)]

(a) Geben Sie λ-Terme M und P an, für die gilt:

$$(\lambda y.M)[P/x] \not\equiv \lambda y.(M[P/x]).$$

(b) Läßt sich die letzte Aussage auch zeigen, wenn P oder M ein *Kombinator*, d.h. ein geschlossener λ-Term ist? (Begründung)

(c) Beweisen Sie für alle λ-Terme P, Q und M:

$$(M[Q/x])[P/x] \equiv M[(Q[P/x])/x].$$

Aufgabe 4 [4]

Zeigen Sie, daß nicht immer *ein einziger* Schritt ausreicht, um von $\lambda y.M[y/x]$ zu $\lambda x.M$ zu gelangen.
D.h., die Relation "gebundene Umbenennung in einem Schritt" ist nicht symmetrisch.