Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

PD Dr. Fritz Hamm, Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 2**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Drücken Sie jede der folgenden Formeln durch eine extensional gleiche Formel aus, in der als einziger Junktor der Peircesche Pfeil $\downarrow$ vorkommt.

a) $p \vee \neg q$

b) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

c) $(p \wedge q) \vee r$

d) $p \leftrightarrow q$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Menge $\{\vee, \wedge\}$ nicht adäquat ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

a) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q \wedge \neg q)$

b) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$

c) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

d) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

e) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

a) Wenn $\Gamma \models \phi \vee \psi$, dann $\Gamma \models \phi$ oder $\Gamma \models \psi$.

b) Wenn $\Gamma \models \phi$ oder $\Gamma \models \psi$, dann $\Gamma \models \phi \vee \psi$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Geben Sie für jede dieser Folgerungsbeziehungenen eine Interpolante an.

a) $\{p, p \rightarrow q\} \models (q \rightarrow r) \rightarrow r$

b) $\{\neg(p \vee q) \wedge (p \leftrightarrow q)\} \models ((r \rightarrow q) \wedge \neg(s \wedge r))$

Aufgabe 6 (8 Zusatzpunkte)

Eine *Boolesche Algebra* ist eine Struktur $\mathfrak{B} = \langle B, \cdot, +, ^{-}, 0, 1\rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot z &= (x \cdot y) \cdot z & \qquad (x + y) + z &= (x + y) + z \\
x \cdot y &= y \cdot x & x + y &= y + x \\
x \cdot (y + z) &= (x \cdot y) + (x \cdot z) & x + (y \cdot z) &= (x + y) \cdot (x + z) \\
x \cdot 1 &= x & x + 0 &= x \\
x \cdot 0 &= 0 & x + 1 &= 1 \\
x \cdot \bar{x} &= 0 & x + \bar{x} &= 1 \\
x \cdot x &= x & x + x &= x
\end{aligned}
$$

a) Es werde zusätzlich die Relation $\leq$ auf $\mathfrak{B}$ definiert durch $a \leq b$, falls $a \cdot b = a$. Zeigen Sie, daß $\leq$ eine Halbordnung mit minimalem Element 0 und maximalem Element 1 ist.

b) Sei $V = \{p, q, r\}$ eine Menge von Aussagenvariablen und Ψ die Menge der Formeln über $V \cup \{\wedge, \vee, \neg\}$. Die Relation $\equiv$ auf Ψ sei definiert durch $\phi \equiv \psi$, falls ϕ und ψ extensional gleich sind. Zeigen Sie, daß $\Psi/\equiv$ eine Boolesche Algebra ist.