Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

PD Dr. Fritz Hamm, Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 3**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Leiten Sie folgende Sequenz im Aussagenkalkül her:

$$\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Proposition 6.6 besagt, daß die Sequenz

$$\vdash (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi) \qquad (\star)$$

im Aussagekalkül hergeleitet werden kann. Der Beweis dieser Proposition verweist jedoch auf das Deduktionstheorem, d.h. es wird lediglich gezeigt, daß die Sequenz

$$\phi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\phi \qquad (\star\star)$$

im Aussagekalkül hergeleitet werden kann. Vervollständigen Sie anhand des Beweises des Deduktionstheorems die Herleitung von $(\star\star)$ zu einer lückenlosen Herleitung von $(\star)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Distributivitätsgesetz in folgender Form: Für alle natürlichen Zahlen m, n sind die Formeln

$$\bigvee_{i \leq m} p_i \wedge \bigvee_{j \leq n} q_j \quad \text{und} \quad \bigvee_{i \leq m,\, j \leq n} (p_i \wedge q_j)$$

extensional gleich.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Geben Sie zu folgenden Formeln jeweils eine konjunktive und eine disjunktive Normalform an:

a) $(\neg p \wedge q) \to (r \leftrightarrow \neg q)$

b) $p \to (q \to p)$

c) $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)) \to (r \wedge \neg r)$

Aufgabe 5 (8 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Im folgenden verweise **AK** auf den Aussagenkalkül aus der Vorlesung. Insbesondere soll für eine Menge Δ von Formeln die Aussage $\Delta \vdash_{\mathbf{AK}} \phi$ bedeuten, daß die Sequenz $\Delta' \vdash \phi$ für eine Liste von Ausdrücken aus Δ in diesem Kalkül herleitbar ist.
Wir definieren einen alternativen Begriff der Herleitbarkeit von Formeln in einem *Hilbert-Typ* Kalkül **HK**. Dieser unterscheidet sich vom Aussagenkalkül vor allem darin, daß es sich dabei um einen Behauptungskalkül handelt. Während in **AK** Sequenzen hergeleitet werden, von denen jede die Gültigkeit einer Formel in Abhängigkeit von einer Liste anderer Formeln ausdrückt, können in **HK** nur Formeln behauptet werden.

Die Axiomenschemata von **HK** sind:

$$
\begin{array}{ll}
(A1) & \phi \to (\psi \to \phi) \\
(A2) & (\phi \to (\psi \to \rho)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \rho)) \\
(A3) & \phi \to (\neg\phi \to \psi) \\
(A4) & (\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \psi)
\end{array}
$$

Folgenden Regeln geben an, welche Formeln in **HK** hingeschrieben werden dürfen:

1) Man darf jede Instanz eines Axiomenschemas hinschreiben.

2) Wenn man für beliebige ϕ und ψ sowohl ϕ als auch $\phi \to \psi$ hinschreiben darf, dann darf man auch ψ hinschreiben.

Es bezeichne $\vdash_{\mathbf{HK}} \phi$ die Tatsache, daß man ϕ gemäß dieser Regeln hinschreiben darf.

Um in **HK** die Abhängigkeit einer Behauptung von einer Menge von Annahmen Δ auszudrücken, betrachtet man einen erweiterten Kalkül $\mathbf{HK}_{\boldsymbol{\Delta}}$, in dem man unter Verwendung folgender Regel zusätzliche Ausdrücke hinschreiben darf:

1') Man darf jede Formel aus Δ hinschreiben.

Es bezeichne $\Delta \vdash_{\mathbf{HK}} \phi$ die Tatsache, daß man ϕ in $\mathbf{HK}_{\boldsymbol{\Delta}}$ unter Verwendung aller drei Regeln hinschreiben darf.

a) Zeigen Sie, daß für alle Formeln ϕ gilt: $\Delta \vdash_{\mathbf{AK}} \phi$ genau dann, wenn $\Delta \vdash_{\mathbf{HK}} \phi$.

b) (Zusatzaufgabe) Zeigen Sie, daß man $(A4)$ ersetzen kann durch

   $(A4') \quad \neg\neg\phi \to \phi$

   Kann man $(A3)$ und $(A4)$ gemeinsam ersetzen durch $(A4')$?