Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

PD Dr. Fritz Hamm, Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 7**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) $\forall x\phi \to \exists x\psi \;\; \dashv\models \;\; \exists x(\phi \to \psi)$

b) $\exists x\phi \to \forall x\psi \;\; \dashv\models \;\; \forall x(\phi \to \psi)$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Leiten Sie folgende Sequenzen im Prädikatenkalkül her:

a) $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$

b) $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \exists x\psi)$

c) $\vdash \forall x\forall y\phi \to \forall y\forall x\phi$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei $x \notin Fr(\phi)$. Leiten Sie folgende Sequenzen im Prädikatenkalkül her:

a) $\vdash \exists x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \exists x\psi)$

b) $\vdash \exists x(\psi \to \phi) \to (\forall x\psi \to \phi)$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ eine beliebige $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{L}(M)$ die Sprache, die man erhält, wenn man für jedes Element $a \in M$ einen Namen $\dot{a}$ zum Alphabet von $\mathcal{L}$ hinzufügt. Es sei $\mathfrak{M}^*$ die $\mathcal{L}(M)$-Struktur, die aus $\mathfrak{M}$ entsteht, indem man jedes Element von M durch seinen Namen bezeichnet. Zeigen Sie, daß $\{\phi \in \mathcal{L}(M) \mid Fr(\phi) = \emptyset \text{ und } \mathfrak{M}^* \models \phi\}$ eine vollständige Henkin-Theorie ist.