Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

PD Dr. Fritz Hamm, Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 8**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? Begründen Sie!

a) $\forall x \exists y \phi \to \exists y \forall x \phi$

b) $\forall x \exists y \phi \to \forall y \exists x \phi$

c) $\exists x \forall y \phi \to \forall y \exists x \phi$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Geben Sie für jede allgemeingültige Formel aus der ersten Aufgabe eine Herleitung im Prädikatenkalkül an.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, daß für eine beliebige Struktur $\mathfrak{M}$ die Theorie $T \stackrel{def}{=} \{\phi \mid Fr(\phi) = \emptyset$ und $\mathfrak{M} \models \phi\}$ eine vollständige Theorie ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Die Sprache $\mathcal{L}^*$ ergebe sich aus der Sprache $\mathcal{L}$ durch Hinzunahme weiterer Zeichen. Es sei S eine Menge von $\mathcal{L}^*$-Aussagen und T eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen. Die Menge S heißt *konservative Erweiterung* von T, wenn für jede $\mathcal{L}$-Aussage ϕ gilt:

$$S \vdash_{\mathcal{L}^*} \phi \text{ genau dann, wenn } T \vdash_{\mathcal{L}} \phi$$

Sei nun T eine widerspruchsfreie Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und sei T_H die Henkinisierung von T. Zeigen Sie, daß T_H eine konservative Erweiterung von T ist.