Musterlösung von Aufgabe 2a), Blatt 7:

$$
\begin{array}{lll}
\forall x(\phi \to \psi), \forall x\phi & \vdash & \forall x\phi \qquad \text{(P2)} \\
\forall x(\phi \to \psi), \forall x\phi & \vdash & \forall x\phi \to \phi(x/x) \qquad \text{(P1:Q4)} \\
\forall x(\phi \to \psi), \forall x\phi & \vdash & \phi(x/x) \qquad \text{(P4)} \\
\forall x(\phi \to \psi), \forall x\phi & \vdash & \forall x(\phi \to \psi) \qquad \text{(P2)} \\
\forall x(\phi \to \psi), \forall x\phi & \vdash & \forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \psi)(x/x) \qquad \text{(P1:Q4)} \\
\forall x(\phi \to \psi), \forall x\phi & \vdash & (\phi \to \psi)(x/x) \qquad \text{(P4)} \\
\forall x(\phi \to \psi), \forall x\phi & \vdash & \psi(x/x) \qquad \text{(P4)} \\
\forall x(\phi \to \psi), \forall x\phi & \vdash & \forall x\psi \qquad \text{(P6)}
\end{array}
$$

Dabei ist $\phi(x/x) \doteq \phi$, $(\phi \to \psi)(x/x) \doteq (\phi \to \psi) \doteq (\phi(x/x) \to \psi(x/x))$ und $\psi(x/x) \doteq \psi$.

Mit Hilfe des Deduktionstheorems folgt dann:

$$\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$$