Beweise und Widerlegungen in der formalen Logik SS 2008

Übungsblatt 5 (Abgabe am 11. 6.) Thomas Piecha

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Geben Sie für folgende Ableitungen an, welche Formelvorkommen maximal sind, und normalisieren Sie die Ableitungen. Geben Sie dabei jeweils zwei Reduktionen mit allen erforderlichen Kontraktionsschritten an. (Der Parameter a komme in keiner Annahme in $\mathcal{D}$ vor, von der die Prämisse einer Anwendung von $(\forall\,\mathrm{I})$ abhängt.)

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{\forall x P(x,a)}}{P(b,a)}\,(\forall\,\mathrm{E})}{\forall y P(y,a)}\,(\forall\,\mathrm{I})}{P(a,a)}\,(\forall\,\mathrm{E})}{\forall z P(z,z)}\,(\forall\,\mathrm{I})}{P(b,b)}\,(\forall\,\mathrm{E})$$

(4 Punkte)

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^{(2)} \quad \dfrac{\dfrac{(A\to B)\to A^{(3)} \quad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{B}}{A\to B}\,(\to\mathrm{I})}{A}\,(\to\mathrm{E})}{(A\to B)\to A}\,(\to\mathrm{I})}{A}\,(\wedge\,\mathrm{I})}{\neg A\wedge A}\,(\wedge\,\mathrm{E})}{\neg A} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{B}}{A\to B}\,(\to\mathrm{I})}{(A\to B)\to A^{(3)}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^{(2)} \quad A^{(1)}}{\bot}\,(\to\mathrm{E})}{B}\,(\bot)_c}{A\to B}\,(\to\mathrm{I})\,{}^{(1)}}{A}\,(\to\mathrm{E})}{\bot}\,(\to\mathrm{E})}{A}\,(\bot)_c\,{}^{(2)}}{((A\to B)\to A)\to A}\,(\to\mathrm{I})\,{}^{(3)}$$

(5 Punkte)

(c) (x nicht frei in A)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to\forall x B(x) \quad A^{(1)}}{\forall x B(x)}\,(\to\mathrm{E})}{B(a)}\,(\forall\,\mathrm{E})}{A\to B(a)}\,(\to\mathrm{I})\,{}^{(1)} \quad \mathcal{D}\;A}{B(a)}\,(\to\mathrm{E})}{A\to B(a)}\,(\to\mathrm{I})}{\forall x(A\to B(x))}\,(\forall\,\mathrm{I})}{A\to B(a)}\,(\forall\,\mathrm{E})$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) $\forall x(A\to B(x)) \vdash_{\mathrm{NK}} A\to\forall x B(x)$ (x nicht frei in A) (2 Punkte)

(b) $A\to\exists x B(x) \vdash_{\mathrm{NK}} \exists x(A\to B(x))$ (x nicht frei in A)

Hinweis: Verwenden Sie den Beweis einer aussagenlogischen Formel. (3 Punkte)