

Maximale Formelvorkommen, Kontraktion/Reduktion

Welche Formelvorkommen sind maximal?

Normalisieren Sie die folgende Ableitung \mathcal{D} :

$$\frac{\frac{\frac{A \wedge B^{(2)}}{A} (\wedge E) \quad \frac{B \rightarrow C^{(1)}}{C} (\rightarrow E)}{\frac{C \rightarrow A}{A} (\rightarrow I)} \quad \frac{\frac{\frac{A \wedge B^{(2)}}{A} (\wedge E) \quad \frac{A \wedge B^{(2)}}{B} (\wedge E)}{\frac{A \wedge B}{B} (\wedge I)} \quad \frac{\frac{A \wedge B}{B} (\wedge E)}{B} (\rightarrow E)}{\frac{A}{(B \rightarrow C) \rightarrow A} (\rightarrow I)(1)} \quad \frac{C}{(A \wedge B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow A)} (\rightarrow I)(2)}$$

\mathcal{D} kontrahiert mit (i) zu

$$\frac{\frac{\frac{A \wedge B^{(2)}}{A} (\wedge E) \quad \frac{B \rightarrow C^{(1)}}{C} (\rightarrow E)}{\frac{C \rightarrow A}{A} (\rightarrow I)} \quad \frac{A \wedge B^{(2)}}{B} (\rightarrow E)}{\frac{A}{(B \rightarrow C) \rightarrow A} (\rightarrow I)(1)} \quad \frac{C}{(A \wedge B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow A)} (\rightarrow I)(2)}$$

und mit (ii) zu \mathcal{D}'

$$\frac{\frac{A \wedge B^{(1)}}{A} (\wedge E)}{\frac{(B \rightarrow C) \rightarrow A}{(A \wedge B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow A)} (\rightarrow I)(1)}$$

Die Ableitung \mathcal{D}' enthält kein maximales Formelvorkommen, ist also in Normalform.

Statt zuerst mit (i) zu kontrahieren, hätte eine Umformung mit (ii) die Ableitung \mathcal{D} in einem Schritt reduziert.

Notwendigkeit der Parametersepariertheit

Warum sind in der untenstehenden (linken) Ableitung (a komme in keiner Annahme in \mathcal{D}' vor, von der $P(a, a)$ abhängt) Parameter nicht separiert?

In der Ableitung sind Parameter nicht separiert, da der Eigenparameter b der ersten $(\forall I)$ nicht nur über dieser Anwendung, sondern auch darunter vorkommt.

Kontrahieren Sie die linke Ableitung, um das maximale Formelvorkommen $\forall zP(z, z)$ (eingerahmt) zu beseitigen.

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D}' \\
 \left. \begin{array}{l}
 (\forall E) \frac{\forall xP(x, a)}{P(b, a)} \\
 (\forall I) \frac{\forall yP(y, a)}{\forall yP(y, a)} \\
 (\forall E) \frac{P(a, a)}{P(a, a)}
 \end{array} \right\} \mathcal{D} \\
 \frac{\boxed{\forall zP(z, z)}}{P(b, b)} \quad (\forall I) \quad (\forall E)
 \end{array}
 \triangleright_1
 \begin{array}{c}
 \mathcal{D}'[a/b] \\
 \left. \begin{array}{l}
 \forall xP(x, b) \\
 \frac{P(b, b)}{P(b, b)} \\
 \frac{\forall yP(y, b)}{P(b, b)}
 \end{array} \right\} = \mathcal{D}[a/b]
 \end{array}$$

Warum ist die resultierende Ableitung *nicht* korrekt?

Von $P(b, b)$ darf mit $(\forall I)$ nicht zu $\forall yP(y, b)$ übergegangen werden.

Stellen Sie in der linken Ableitung erst Parametersepariertheit her, und kontrahieren Sie diese Ableitung.

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D}' \\
 \frac{\forall xP(x, a)}{P(b, a)} \\
 \frac{\forall yP(y, a)}{P(a, a)} \\
 \frac{\boxed{\forall zP(z, z)}}{P(b, b)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Parameter-} \\
 \text{separierung} \\
 \rightsquigarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{D}' \\
 \frac{\forall xP(x, a)}{P(b, a)} \\
 \frac{\forall yP(y, a)}{P(a, a)} \\
 \frac{\boxed{\forall zP(z, z)}}{P(c, c)}
 \end{array}
 \triangleright_1
 \begin{array}{c}
 \mathcal{D}'[a/c] \\
 \frac{\forall xP(x, c)}{P(b, c)} \\
 \frac{\forall yP(y, c)}{P(c, c)}
 \end{array}$$

Die resultierende Ableitung ist korrekt.