Vorlesung WS 2001/02: Nichtklassische Logiken **Bogen 2**

Prof. Dr. Peter Schroeder-Heister
Dr. Kai F. Wehmeier

Aufgabe 1
Es sei $\mathfrak{M}$ eine Struktur oder Matrix. Eine Formel Q heiße $\mathfrak{M}$-kontradiktorisch, wenn $Q \models_{\mathfrak{M}} R$ für jede Formel R gilt. Zeigen Sie:

Wenn $\Sigma \cup \{Q, P\}$ eine Menge von Formeln ist, $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathfrak{M}} P$ gilt, kein Aussagesymbol, das in Q auftritt, in einer der Formeln aus $\Sigma \cup \{P\}$ auftritt und Q nicht $\mathfrak{M}$-kontradiktorisch ist, dann gilt schon $\Sigma \models_{\mathfrak{M}} P$. (5)

Aufgabe 2 Für eine n-stellige Wahrheitsfunktion $f : \{0, i, 1\}^n \to \{0, i, 1\}$ und eine beliebige Formel A definieren wir:

A stellt f dar, wenn für jede Bewertung ν gilt: $f(\nu(p_1), \dots, \nu(p_n)) = \nu(A)$.

Den Junktoren $\sim$ und $\vee$ seien die Wahrheitsfunktionen $f_\sim$ bzw. $f_\vee$ zugeordnet, wobei gelte: $f_\sim(1) = i$, $f_\sim(i) = 0$, $f_\sim(0) = 1$, $f_\vee(1, x) = f_\vee(x, 1) = 1$ für jedes $x \in \{0, i, 1\}$, $f_\vee(0, 0) = 0$ und $f_\vee(x, y) = i$ für alle anderen Paare $(x, y) \in \{0, i, 1\}^2$.
Geben Sie jeweils Formeln an, die nur mithilfe von $\sim$ und $\vee$ aus Aussagevariablen zusammengesetzt sind und die die folgenden Wahrheitsfunktionen darstellen:

(a) $f_{\text{true}}(1) = 1$, $f_{\text{true}}(i) = f_{\text{true}}(0) = 0$ (3)

(b) $f_{\text{ind}}(i) = 1$, $f_{\text{ind}}(1) = f_{\text{ind}}(0) = 0$ (3)

(c) $f_{\text{false}}(0) = 1$, $f_{\text{false}}(1) = f_{\text{false}}(i) = 0$ (3)

(d) $f_\neg(1) = 0$, $f_\neg(i) = i$, $f_\neg(0) = 1$ (3)

(e) $f_\wedge(1, 1) = 1$, $f_\wedge(0, x) = f_\wedge(x, 0) = 0$ für jedes $x \in \{0, i, 1\}$, $f_\wedge(x, y) = i$ für alle anderen Paare $(x, y) \in \{0, i, 1\}^2$ (1)

Aufgabe 3 Ein Junktorensystem (Menge von Junktoren) J heißt (funktional) vollständig, wenn es zu jedem $n \geq 0$ und jeder n-stelligen Wahrheitsfunktion $f : \{0, i, 1\}^n \to \{0, i, 1\}$ eine Formel gibt, die aus Aussagevariablen nur mithilfe der Junktoren aus J aufgebaut ist und die f darstellt.

(a) (Zusatzaufgabe) Zeigen Sie, daß das Junktorensystem $\{\sim, \vee\}$ vollständig ist. (10)

Tip: Führen Sie Induktion über die Stellenzahl der darzustellenden Wahrheitsfunktionen. Nullstellige Wahrheitsfunktionen sind Elemente von $\{0, i, 1\}$. Der $(n+1)$-stellige Fall läßt sich mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 2 auf den n-stelligen zurückführen, indem man z.B. das $(n+1)$te Argument konstant hält.

(b) Schließen Sie aus (a), daß auch das Junktorensystem $\{|\}$ funktional vollständig ist. (2)

Dem Junktor $|$, auch (verallgemeinerter) Sheffer-Strich genannt, ist dabei folgende Wahrheitsfunktion zugeordnet: $f_{|}(0,0) = 1$, $f_{|}(1,x) = f_{|}(x,1) = i$ für jedes $x \in \{0, i, 1\}$ und $f_{|}(x,y) = 0$ für alle anderen Paare $(x,y) \in \{0, i, 1\}^2$.