**Bartosz Więckowski / Peter Schroeder-Heister**

## Einführung in die Logik (WS 2002/2003)

**Übungsblatt 6**

1. Überprüfen Sie die folgenden Satzmengen mit Hilfe des Wahrheitsbaumverfahrens auf wahrheitsfunktionale Konsistenz. Geben Sie die entsprechenden Fagmente von Wahrheitswertzuordnungen an, falls die Menge konsistent ist.

| | | |
|---|---|---|
| a) | $\{\neg A \vee \neg\neg((C \to A) \vee D), (\neg B \wedge \neg (A \wedge \neg C)), (A \wedge D) \vee (A \wedge C)\}$ | (**1 Punkt**) |
| b) | $\{\neg\neg\neg(G \to \neg(E \vee F)), \neg(H \wedge I) \leftrightarrow \neg G, E \wedge \neg I , \neg(\neg G \wedge E) \to \neg I\}$ | (**1 Punkt**) |

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Wahrheitsbaumverfahrens den wahrheitsfunktionalen Status (wahrheitsfunktional wahr, wahrheitsfunktional falsch oder wahrheitsfunktional indeterminiert) der folgenden Sätze, wobei Sie das angegebene Verfahren anwenden. (Verfahren 1: Konstruktion von maximal zwei Wahrheitsbäumen, Verfahren 2: Konstruktion eines vollständigen Wahrheitsbaumes und Ermittlung von Wahrheitswertzuordnungsfragmenten.) Geben Sie alle relevanten Fragmente an, falls der Baum nicht schließt.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $(\neg(C \wedge \neg\neg\neg E) \to (C \to D)) \leftrightarrow \neg(C \wedge \neg(E \to D))$ | (Verfahren 1) | (**1 Punkt**) |
| b) | $(G \wedge H) \to \neg((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ | (Verfahren 2) | (**1.5 Punkte**) |
| c) | $(\neg\neg(J \to I) \to (I \vee \neg J)) \wedge ((J \to I) \to \neg\neg\neg(J \wedge \neg I))$ | (Verfahren 2) | (**1.5 Punkte**) |
| d) | $\neg O$ | (beide Verfahren) | (**1 Punkt**) |

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des Wahrheitsbaumverfahrens, ob die folgenden Satzpaare wahrheitsfunktional äquivalent sind. Geben Sie für die nichtäquivalenten Satzpaare die relevanten Fragmente von Wahrheitswertzuordnungen an.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a) | $N \vee (O \wedge P)$ | und | $(N \vee O) \wedge (N \vee P)$ | (**0.5 Punkte**) |
| b) | $\neg M \to \neg(K \wedge L)$ | und | $\neg\neg(\neg L \vee M) \wedge (K \to M)$ | (**1 Punkt**) |

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Wahrheitsbaumverfahrens, welche der folgenden Behauptungen wahr und welche falsch sind. Geben Sie für die falschen Behauptungen die relevanten Fragmente von Wahrheitswertzuordnungen an.

| | | |
|---|---|---|
| a) | $\{Q \to R, \neg R \to \neg Q\} \models R \to Q$ | (**0.5 Punkte**) |
| b) | $\{(S \vee T) \to (\neg S \vee \neg T), T \leftrightarrow (\neg T \vee S)\} \not\models T \to S$ | (**1 Punkt**) |
| c) | $\models \neg(W \to (X \to Y)) \to \neg((Z \to X) \to (W \to Y))$ | (**1 Punkt**) |
| d) | $\not\models \neg(U \leftrightarrow V) \wedge \neg(\neg U \leftrightarrow \neg V)$ | (**1 Punkt**) |

5. Symbolisieren Sie das folgende Argument und bringen Sie es in die Standardform. Bestimmen Sie dann mit Hilfe des Wahrheitsbaumverfahrens, ob das Argument wahrheitsfunktional gültig ist. Geben Sie, falls es nicht gültig ist, die relevanten Fragmente von Wahrheitswertzuordnungen an.

> Wenn der Redner besticht, dann wird die Hörerschaft begeistert sein, und wenn die Hörerschaft begeistert ist, dann wird es einen langanhaltenden Applaus geben. Nun, wenn der Redner über existentielle Tiefe, über feinsinnigen Humor oder über moralische Integrität verfügt, die mit einem Unbehagen an den gegenwärtigen Verhältnissen gepaart ist, oder wenn

er zu erfrischendem Wortspiel neigt, dann wird er bestechen. Doch der Orator verfügt weder über feinsinnigen Humor, noch neigt er zu erquickenden Wortspielchen, wohl aber läßt er existentielle Tiefe ahnen. Ja, es wird einen langanhaltenden Beifall geben und was noch hinzukommt, er wird die Hörerschaft für etwas oberflächlich halten, da er das immer dann tut, wenn es langanhaltenden Beifall gibt.

(**3 Punkte**)

6. Die charakteristische Wahrheitstafel für das wahrheitsfunktionale Konnektiv ‚↓' (Sheffers Pfeil) sieht wie folgt aus:

| $A$ | $B$ | $A \downarrow B$ |
|---|---|---|
| **w** | **w** | **f** |
| **w** | **f** | **f** |
| **f** | **w** | **f** |
| **f** | **f** | **w** |

Wenn wir Sätze, die mit ‚↓' zusammengesetzt sind, mit Hilfe des Wahrheitsbaumverfahrens bearbeiten wollen, müssen wir zwei neue Dekompositionsregeln einführen. Eine Regel für Sätze mit der Dekompositionsform $A \downarrow B$ und eine Regel für Sätze mit der Dekompositionsform $\neg(A \downarrow B)$. Formulieren Sie die entsprechenden Dekompositionsregeln. Verwenden Sie diese Regeln, um mit Hilfe des Wahrheitsbaumverfahrens zu bestimmen, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind.

a) $\mathrm{C} \downarrow \mathrm{D} =\!\!||\!\!= (\mathrm{C} \downarrow \mathrm{C}) \wedge (\mathrm{D} \downarrow \mathrm{D})$
b) $\{\neg(\mathrm{E} \downarrow (\mathrm{F} \downarrow \mathrm{G})), \neg\mathrm{E}\} \models (\mathrm{F} \downarrow \mathrm{G})$
c) $\not\models (\mathrm{H} \downarrow \mathrm{I}) \leftrightarrow \neg(\neg\mathrm{H} \vee \neg\mathrm{I})$

(**6 Punkte**)

7. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr? Begründen Sie Ihr Urteil und geben Sie Beispiele, wo es Ihnen geeignet erscheint.

a) Wenn ein Wahrheitsbaum für $\{\neg A\}$ ausschließlich offene Zweige hat, dann $\models \neg A$. (**1 Punkt**)
b) Wenn der vollständige Wahrheitsbaum für $\{A\}$ genau einen offenen Zweig hat, dann ist $\neg A$ wahrheitsfunktional indeterminiert. (**1 Punkt**)
c) Wenn $A$ und $B$ wahrheitsfunktional äquivalent sind, dann ist der Wahrheitsbaum für $\{A, B\}$ offen. (**1 Punkt**)
d) Kein wahrheitsfunktional indeterminierter Satz kann bei Anwendung von Verfahren 2 (siehe Aufgabe 2) mit der Konstruktion nur eines Wahrheitsbaumes als solcher identifiziert werden. (**1 Punkt**)

8. Beweisen Sie: Wenn $\{A\} \models B$ und $\{\neg A\} \models C$, dann $\models B \vee C$. (**4 Punkte**)

*Abgabe in der Sitzung am 28. November 2002.*