Übungen zur Informatik III — Blatt 12

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2003/04**

Abgabe am Donnerstag, den 22. Januar, in der Vorlesungspause

Aufgabe 56 (4 Punkte)

Es seien $f_1, \ldots, f_m : (\Sigma^*)^n \longrightarrow \Sigma^*$ und $g : (\Sigma^*)^m \longrightarrow \Sigma^*$ Turing-berechenbare Funktionen. Zeigen Sie, daß dir Funktion $h : (\Sigma^*)^n \longrightarrow \Sigma^*$, die durch

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

definiert ist, Turing-berechenbar ist.

Aufgabe 57 (2+4 Punkte)

Die Funktion $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$h(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x$$

(a) Zeigen Sie, daß h bijektiv ist.

(b) Definieren Sie primitiv rekursive Funktionen $h_1, h_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so daß gilt:

- $h_1(h(x, y)) = x$
- $h_2(h(x, y)) = y$
- $h(h_1(z), h_2(z)) = z$

Aufgabe 58 (4+2+4 Punkte)

Es seien $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und $q : \mathbb{N}^{m+2} \longrightarrow \mathbb{N}$. Weiterhin seien $r_1, \ldots, r_m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ so definiert, daß für alle $x, y \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq m$ jeweils $r_i(x, y) \leq y$ ist. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ werde durch *Wertverlaufsrekursion* definiert, d.h. durch das Schema

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= g(x) \\ f(x, y') &= q(x, y, f(x, r_1(x, y)), \ldots, f(x, r_m(x, y))) \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, daß f primitiv-rekursiv ist, falls $g, q, r_1, \ldots, r_m$ primitiv-rekursiv sind.

(b) Modifizieren Sie das Schema der Wertverlaufsrekursion dahingehend, daß Funktionen $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ auf entsprechende Weise definiert werden können.

(c) Definieren Sie eine Funktion, welche durch Wertverlaufsrekursion die Fibonacci-Folge (von einem geeigneten Anfangswert an) berechnet.

Aufgabe 59 (4 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie, daß jede kontextfreie Sprache Turing-entscheidbar ist.

Im Auftrag der Studienkommission Informatik wird eine Vorlesungsevaluation ausgeführt. Bitte füllen Sie den ausliegenden Fragebogen aus und geben Sie ihn mit den bearbeiteten Aufgaben am 22. Januar ab. Bitte ein Fragebogen *pro Person*. Bitte heften Sie die ausgefüllten Fragebögen nicht an die bearbeiteten Übungsaufgaben, da sie separat eingesammelt und (anonym) bearbeitet werden.