Übungen zur Informatik III — Blatt 13

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2003/04**

Abgabe am Donnerstag, den 29. Januar, in der Vorlesungspause

Aufgabe 60 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß die Funktion $\mathrm{ggT}(x, y)$, die den größten gemeinsamen Teiler von x und y liefert, *primitiv* rekursiv ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$x -_p y \;:=\; \begin{cases} x - y & \text{falls } y \leq x \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

partiell rekursiv ist.

Aufgabe 61 (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, daß folgende Definitionen primitiv rekursive Funktionen erklären:

(a) $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_i, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, wobei $g : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion ist.

(b) $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$, wobei $g : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion und π eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ ist.

Aufgabe 62 (1+1+2+2+3+3 Punkte)

Die Klasse der *elementaren Funktionen* umfaßt die Grundfunktionen $C_1^1, U_i^n, +, \times, -$. Aus diesen Grundfunktionen können durch Komposition, *beschränkte Summe* und *beschränktes Produkt* neue elementare Funktionen erzeugt werden. Die Komposition entspricht exakt der von den primitiv rekursiven Funktionen her bekannten Bildungsvorschrift. Die beschränkte Summe Σ_f und das beschränktes Produkt Π_f einer elementaren Funktion f sind durch folgende Gleichungen erklärt:

$$\begin{aligned} \Sigma_f(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}, 0) \\ \Sigma_f(\vec{x}, y') &= +(\Sigma_f(\vec{x}, y), f(\vec{x}, y')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_f(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}, 0) \\ \Pi_f(\vec{x}, y') &= \times(\Pi_f(\vec{x}, y), f(\vec{x}, y')) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß folgende Funktionen zur Klasse der elementaren Funktionen gehören:

(a) die konstante Nullfunktion C_0^1,

(b) die Nachfolgerfunktion N,

(c) die Signumfunktion sg und die Cosignumfunktion $\overline{\mathrm{sg}}$,

(d) die charakteristischen Funktionen der Relationen $<, \leq$ und $=$,

(e) die Potenzfunktion exp und die Fakultätsfunktion fak,

(f) die Funktion bin mit $\mathrm{bin}(x, y) = \binom{x}{y}$.

Aufgabe 63 (2+2 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie, daß die Funktionen $\mathrm{div} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ (Ganzzahldivision) und $\mathrm{mod} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, (Rest bei der Ganzzahldivision) zur Klasse der elementaren Funktionen gehören.