Klausur Informatik III

2. März 2004

Max Mustermann

1234567

- **Klausur erst nach Aufforderung aufschlagen!**
- Mobiltelefone bitte ausschalten!
- Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Insgesamt sind 60 Punkte erreichbar; die Klausur gilt mit 20 Punkten als bestanden.
- Eine Abgabe ist vor Ablauf der 60 Minuten *nicht* möglich. Bleiben Sie bitte auf Ihrem Platz, bis alle Klausuren eingesammelt wurden.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
Σ	
Note	

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Geben Sie zu dem regulären Ausdruck

$$\gamma = (ab^*)^* \cup bc^*a$$

einen reduzierten deterministischen endlichen Automaten (DEA) $\mathcal{A}$ über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ an mit $L(\mathcal{A}) = \langle\gamma\rangle$.

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $\Gamma = \langle\{S, T, U, V, W, X, A, B, C\}, \{a, b, c\}, \Pi, S\rangle$, wobei Π durch folgende Produktionen erklärt ist:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl@{\qquad}lcl}
S & \longrightarrow & AT & V & \longrightarrow & BW \mid CX \mid CA & A & \longrightarrow & a \\
T & \longrightarrow & AU & W & \longrightarrow & CX \mid CA & B & \longrightarrow & b \\
U & \longrightarrow & AV & X & \longrightarrow & AV & C & \longrightarrow & c
\end{array}
$$

a) Entscheiden Sie mithilfe des Algorithmus von Coke, Younger und Kasami (CYK), ob die folgenden Wörter in $L(\Gamma)$ enthalten sind:

   1. *aacabca*
   2. *aaabcaca*

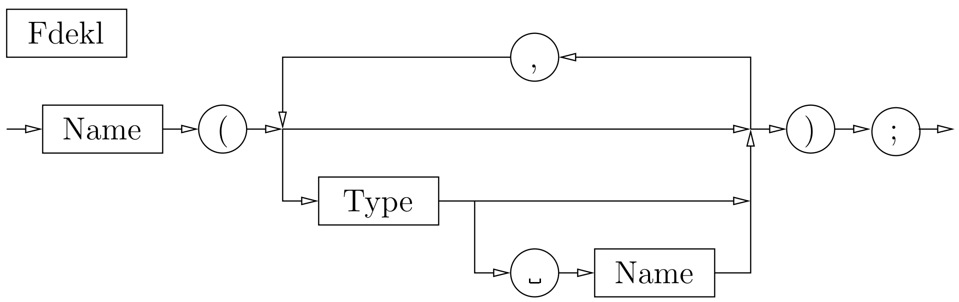
b) Ist die Sprache $L(\Gamma)$ regulär?

Max Mustermann
1234567

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Syntaxdiagramme sind eine alternative Form der Darstellung kontextfreier Grammatiken, bei der die rechte Seite einer Produktion durch einen Graphen dargestellt wird, der sogar Schleifen enthalten kann. Das folgende Beispiel ist die Produktion, die zu der Variable "Fdekl" gehört, wobei die Kästchen mit den Bezeichnungen "Name" und "Type" als Variablen auf weitere Syntaxdiagramme verweisen, während die Kreise Terminale enthalten.



Durch dieses Syntaxdiagramm lassen sich z.B. folgende Wörter erzeugen:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{Name}\,(\,);\\
\mathrm{Name}\,(\,\mathrm{Type}\,);\\
\mathrm{Name}\,(\,\mathrm{Type}\,\textvisiblespace\,\mathrm{Name}\,);\\
\quad\vdots\\
\mathrm{Name}\,(\,\mathrm{Type}, \mathrm{Type}\,\textvisiblespace\,\mathrm{Name}\,);\\
\quad\vdots
\end{array}
$$

Geben Sie eine Grammatik $\Gamma = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Pi, \mathrm{Fdekl} \rangle$ an, wobei $\mathcal{V} \supseteq \{\mathrm{Fdekl}, \mathrm{Name}, \mathrm{Type}\}$, $\mathcal{T} = \{(,), ;, \textvisiblespace, ,\}$, so daß in Γ alle Wörter ableitbar sind, die durch das Syntaxdiagramm erzeugt werden können.

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $\Gamma = \langle \{S, T\}, \{0, 1\}, \Pi, S \rangle$, wobei Π durch folgende Produktionen erklärt ist:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & 0S11 \mid T \\ T & \longrightarrow & 0T0 \mid 1T1 \mid 00 \end{array}$$

a) Konstruieren Sie einen zu Γ äquivalenten Kellerautomaten $\mathcal{A}$ mit $N(\mathcal{A}) = L(\Gamma)$.

b) Konstruieren Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{A}'$ mit $L(\mathcal{A}') = N(\mathcal{A})$.

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen (mit Begründung):

a) Sind alle Sprachen über einem einelementigen Alphabet regulär?

b) Ist das Komplement einer kontextfreien Sprache selbst kontextfrei?

c) In welcher Sprachklasse liegt der Schnitt einer kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache?

d) Kann der Schnitt zweier kontextfreier Sprachen regulär sein?

e) Besitzt jedes Wort einer durch eine kontextfreie Grammatik Γ gegebenen Sprache genau eine Linksableitung?

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$ an, welche für die Darstellung natürlicher Zahlen als Binärstrings die Funktion

$$f(x) = 2x + 1$$

berechnet. Das heißt, wenn $[n]_b$ den Binärstring bezeichnet, der zur Zahl n gehört, und dessen niedrigstwertiges Bit ganz rechts steht, dann soll $\mathcal{M}$ für jedes n den folgenden Übergang realisieren:

$$(\underline{\#}[n]_b) \underset{\mathcal{M}}{\Rightarrow} (\underline{\#}[2n + 1]_b)$$

Schreiben Sie $\mathcal{M}$ entweder als Maschinentafel oder Übergangsgraphen auf, also *nicht* als Maschinenschema.

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Schreiben Sie ein LOOP-Programm, das folgende Funktion berechnet:

$$\arg(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x > y \\ 2 & \text{falls } x < y \end{cases}$$

Sie dürfen dabei Zuweisungen der Form $x_i := x_j \dot{-} x_k$ verwenden, ansonsten nur Grundoperationen.

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Ist die Funktion f, die den ganzzahligen Anteil der Wurzel einer natürlichen Zahl x berechnet, d.h. $f(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$, primitiv rekursiv definierbar?

Falls ja, geben Sie eine entsprechende Definition an.

Falls nicht, geben Sie eine partiell rekursive Funktionsdefinition für f an.

Sie dürfen auf Funktionen zurückgreifen, die in der Vorlesung als primitiv rekursiv bzw. partiell rekursiv nachgewiesen wurden.

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Betrachten Sie folgende Eigenschaften von Mengen:

1. Turing-entscheidbar
2. Turing-aufzählbar
3. partiell rekursiv
4. partiell rekursiv aufzählbar
5. rekursiv
6. rekursiv aufzählbar
7. primitiv rekursiv
8. primitiv rekursiv aufzählbar
9. LOOP-entscheidbar*
10. WHILE-entscheidbar*
11. grammatisch

a) Welche dieser Eigenschaften sind äquivalent, welche nicht? Geben Sie die Antwort dadurch, daß Sie Äquivalenzklassen auf der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ angeben.

b) Ordnen Sie die in a) gewonnenen Äquivalenzklassen nach der Stärke der Eigenschaften, die sie beschreiben.

*Eine Menge heißt LOOP- bzw. WHILE-*entscheidbar*, falls deren charakteristische Funktion LOOP- bzw. WHILE-*berechenbar* ist.