

10.4 Symbolisierung in PLI

10.4.1 Identität

Die Standardinterpretation von ‚einige‘, d. h. von ‚ $(\exists x)$ ‘, ist ‚mindestens ein‘. Diese Interpretation ist etwas kontraintuitiv. Wenn uns jemand sagen würde, dass es mindestens einen Keks in der Dose gibt, würden wir vermutlich etwas irritiert reagieren, wenn wir in die Dose hineinschauen würden und nur einen Keks darin vorfinden. Intuitiv würden wir wohl mehr als nur einen Keks erwarten.

In PL lassen sich solche Ausdrücke wie ‚mindestens zwei‘, ‚genau ein‘, ‚genau zwei‘, ‚der einzige‘ und andere Ausdrücke, die etwas präzisere Quantitätsangaben machen ausdrücken, wenn ein 2-stelliges Prädikat von PL (z.B. Ixy) dazu bestimmt wird, die Identitätsrelation auszudrücken. Doch ist es praktischer der Sprache PL ein eigenes 2-stelliges Prädikat hinzuzufügen, nämlich ‚ $=$ ‘, von dem festgelegt wird, dass es sich in allen Symbolisierungen stets auf die Identitätsrelation bezieht.¹ (Wir führen entsprechend ‚ \neq ‘ für die Relation der Nichtidentität ein.)

Die durch die Hinzufügung des Identitätssymbols zu PL entstandene Sprache nennen wir ‚PLI‘ (kurz für ‚Prädikatenlogik mit Identität‘). Ein Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass sie uns erlaubt, die übrigen zweistelligen Prädikate von PL (z.B. Ixy) je nach Bedarf unterschiedlich zu interpretieren. Es folgen einige Symbolisierungsbeispiele.

Um eine Definition der atomaren Formel von PLI zu erhalten, erweitern Definition 9.5 (atomare Formel von PL) um die folgende Klausel.

Wenn A ein Ausdruck der Form $t_1 = t_2$ ist, wobei t_1 und t_2 Metavariablen für Individuenterme von PL sind, dann ist A eine atomare Formel.

Beispiele: $a = b$, $a = x$, $x = y$.

Die Definitionen von Formel von PLI und Satz von PLI ergeben sich aus dieser Erweiterung. Wir legen fest, dass $t_1 \neq t_2$ eine Abkürzung für $\neg t_1 = t_2$ ist.

Symbolisierungsschlüssel 1:

UD:	Alles
E xy :	x ist in y enthalten
K x :	x ist ein Keks
k :	die Keksdose von Oma Käthe

1. Es ist mindestens ein Keks in der Keksdose enthalten.

$(\exists x)(Kx \wedge Exk)$

¹ Zu den Eigenschaften dieser Relation siehe unten Abschnitt 9.4.2.

2. Es sind mindestens zwei Kekse in der Keksdose enthalten.

‚Es gibt ein x und es gibt ein y derart, dass x und y Kekse sind, x und y in der Keksdose sind und dass x und y nicht identisch sind‘.

$$(\exists x)(\exists y)((Kx \wedge Ky) \wedge (Exk \wedge Eyk) \wedge x \neq y)$$

3. Es sind mindestens drei Kekse in der Keksdose enthalten.

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)((Kx \wedge Ky) \wedge Kz \wedge [(Exk \wedge Eyk) \wedge Ezk] \wedge [(x \neq y \wedge y \neq z) \wedge x \neq z])$$

4. Es ist genau ein Keks in der Keksdose enthalten.

Es gibt ein y derart, dass y ein Keks ist und y in der Keksdose ist, und jedes (each) Ding z ist derart, dass wenn z ein Keks ist und in der Keksdose ist, dann ist z identisch mit y.

$$(\exists y)((Ky \wedge Eyk) \wedge (\forall z)((Kz \wedge Ezk) \rightarrow y = z))$$

Folgendes ist zu beachten: Die Verwendung verschiedener Variablen (wie hier ‚y‘ und ‚z‘) verpflichtet uns nicht, anzunehmen, dass es im Individuenbereich mehr als ein Ding der spezifizierten Sorte (hier Kekse) gibt. Das wird am obigen Beispiel deutlich.

Zur Wiederholung, wenn der zweite Quantor im obigen Satz von PLI ebenfalls ein y wäre, dann wäre er kein Satz von PLI, ja er wäre nicht mal eine Formel von PLI (vgl. Abschnitt 9.6.4 unter Berücksichtigung der obigen Klausel für Identität).

10.4.2 Sätze mit singulären Kennzeichnungen

Bislang haben wir der Bequemlichkeit halber für die Symbolisierung von singulären Kennzeichnungen (wie z. B. ‚die Keksdose von Oma Käthe‘) Individuenkonstanten von PL benutzt. Das ist aber—wie in Abschnitt 8.2 angedeutet worden ist—nicht adäquat. Es gibt nämlich Argumente, deren Gültigkeit von der internen Struktur singulärer Kennzeichnungen abhängig ist. So ist z.B. das folgende Argument intuitiv gültig, wird aber ungültig, wenn die singuläre Kennzeichnung mit einer Individuenkonstante wiedergegeben wird.

Der römische Feldherr, der Pompeius besiegt hat, ist sowohl in Gallien als auch in Germanien einmarschiert.

Pompeius wurde von jemandem besiegt, der sowohl in Gallien als auch in Germanien einmarschiert ist.

Symbolisierung 1:

Symbolisierungsschlüssel:

UD:	Personen und Regionen
Exy:	x ist in y einmarschiert
Bxy:	x hat y besiegt
r:	der römische Feldherr, der Pompeius besiegt hat
p:	Pompeius
g:	Gallien
e:	Germanien

Symbolisierung:

$$\frac{\text{Erg} \wedge \text{Ere}}{(\exists x)[\text{Bxp} \wedge (\text{Exg} \wedge \text{Exe})]}$$

ndg

Diese Symbolisierung sagt nicht, dass das Ding, das in Gallien und in Germanien einmarschiert ist ein Ding ist, das Pompeius besiegt hat (was die Konklusion behauptet). Sie sagt auch nicht, dass ein ganz bestimmtes Ding gemeint ist.

Symbolisierung 2:

Die Prämisse des deutschen Arguments lässt sich wie folgt paraphrasieren, wenn die singuläre Kennzeichnung weiter aufgespalten wird:

Rx:	x ist römisch
Fx:	x ist ein Feldherr

Es gibt genau ein Ding, das ein römischer Feldherr ist und das Pompeius besiegt hat, und dieses Ding ist in Gallien und in Germanien einmarschiert.

$$(\exists x)[[(\text{Rx} \wedge \text{Fx}) \wedge \text{Bxp}] \wedge (\forall y)[[(\text{Ry} \wedge \text{Fy}) \wedge \text{Byp}] \rightarrow y = x]] \wedge (\text{Exg} \wedge \text{Exe})]$$

Die singuläre Kennzeichnung wird hier also in eine singuläre Existenzaussage umgewandelt. Diese Strategie geht auf Bertrand Russell (1872-1970) ('On denoting', 1905) zurück. Eigennamen hingegen lassen sich nicht in singuläre Existenzaussagen überführen.

Symbolisierung:

$$\frac{(\exists x)[[(\text{Rx} \wedge \text{Bxp}) \wedge (\forall y)[[(\text{Ry} \wedge \text{Fy}) \wedge \text{Byp}] \rightarrow y = x]]] \wedge (\text{Exg} \wedge \text{Exe})}{(\exists x)[\text{Bxp} \wedge (\text{Exg} \wedge \text{Exe})]}$$

dg

Sätze mit leeren singulären Kennzeichnungen:

Die Russellsche Strategie erlaubt natürlich auch, deutschsprachige singuläre Kennzeichnungen, die de facto nichts bezeichnen, zu symbolisieren.

Beispiel:

UD: Personen und Regionen
Kxy: x ist der König von y
Gx: x ist glatzköpfig
f: Frankreich

Satz: Der (gegenwärtige) König von Frankreich ist glatzköpfig.

Symbolisierung (PLI): $(\exists x)((Kxf \wedge (\forall y)(Kyf \rightarrow y = x)) \wedge Gx)$

Der Satz von PLI (ist nach Russell) falsch, da es keine derartige Person gibt. Dieser Satz ist dann weder sinnlos, noch ohne einen Wahrheitswert.

10.4.3 Zu den Eigenschaften der Identitätsrelation

Wenn x, y und z Variablen von PL oder von PLI sind und A ein zweistelliges Prädikat von PL oder von PLI, dann sagt

- das Schema 1, dass A eine reflexive Relation repräsentiert,
- das Schema 2, dass A eine transitive Relation repräsentiert,
- das Schema 3, dass A eine symmetrische Relation repräsentiert.

Schema 1 (reflexiv): $(\forall x)Axx$

Schema 2 (transitiv): $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((Axy \wedge Ayz) \rightarrow Axz)$

Schema 3 (symmetrisch): $(\forall x)(\forall y)(Axy \rightarrow Ayx)$

Die Identitätsrelation ist reflexiv, transitiv und symmetrisch; sie ist somit eine Äquivalenzrelation.

Beispiele:

Transitive Relationsprädikate:

x ist größer als y
x ist ein Vorfahre von y
x ist schwerer als y

Relationsprädikate, die nicht transitiv sind:

x ist ein Freund von y
x ist die Mutter von y
x zeugt y

Symmetrische Relationsprädikate:

x ist ein Geschwister von y
x ist ein/e Klassenkamerad/in von y
x ist verheiratet mit y

Relationsprädikate, die nicht symmetrisch sind:

x ist eine Schwester von y
x ist der Chef von y
x ist verliebt in y

Reflexiv:

In einem uneingeschränkten Individuenbereich ist es schwer, andere reflexive Relationen als die Identitätsrelation ausfindig zu machen.

x ist gleichschwer mit y

x ist gleichfarbig mit y

Die entsprechenden Relationen sind dann nicht reflexiv, da z.B. die Zahl 2 nicht gleichschwer (oder gleichfarbig) mit sich selbst ist. Zahlen haben (wenn es sie denn gibt) kein Gewicht (oder keine Farbe). Sie werden aber zu reflexiven Relationen, wenn der Individuenbereich in geeigneter Weise eingeschränkt wird. Wenn er nur aus Menschen besteht, dann sind die beiden Relationen reflexiv.

11. PRÄDIKATENLOGIK:

SEMANTIK

- 11.1 Formale Semantik von PL
- 11.2 Formale Semantik von PLI
- 11.3 Logische Eigenschaften und Relationen (PL/PLI)
- 11.4 Zur Entscheidbarkeit

11.1 Formale Semantik von PL

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Wahrheit eines Satzes der Sprache PL in einer formalen Weise definiert. Bevor diese Definition formuliert werden kann, muss eine ganze Reihe neuer Begriffe eingeführt werden. Das soll hier nacheinander geschehen.

11.1.1 Interpretation von PL

Definition 11.1.1 (Interpretation (oder Modell) von PL):

Eine **Interpretation von PL** $J = \langle D, I, V \rangle$ besteht aus einem nicht-leeren Individuenbereich D (wobei u_1, u_2, \dots, u_n Elemente von D sind), aus einer Wahrheitswertzuordnung I an jeden *Satzbuchstaben* von PL und aus einer Zuordnung V

- eines Elements von D zu jeder *Individuenkonstante* von PL
- einer Menge von n -Tupeln $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ von Elementen von D zu jedem n -stelligen *Prädikatbuchstaben* von PL.

Erläuterungen:

1. Ein **n -Tupel** ist eine geordnete Menge, die n Elemente enthält. Eine solche Menge ist insofern geordnet, als ein Element als das erste bezeichnet wird, ein als das zweite und so weiter. (Ein 1-Tupel ist eine geordnete Einermenge, ein 2-Tupel ist ein geordnetes Paar, ein 3-Tupel ein geordnetes Tripel, ein 4-Tupel ist ein geordnetes Quadrupel und so weiter.) Ein n -Tupel wird bezeichnet, indem die Namen der Elemente des n -Tupels in der Reihenfolge, in der sie in dem n -Tupel zwischen den Klammern ‚<‘ und ‚>‘ vorkommen, aufgelistet werden. (Siehe dazu Kapitel 2.)
2. Bei der Menge von n -Tupeln von Elementen u_1, u_2, \dots, u_n aus dem D der Interpretation handelt es sich um die **Extension** eines n -stelligen Prädikatbuchstabens, die diesem Prädikatbuchstaben von V (auch „Bewertung(sfunktion)“ genannt) zugeordnet wird.

Beispiele:

Interpretation 1: G: ‚... ist größer als ...‘
a: ‚Stuttgart‘
b: ‚Tübingen‘

J sei nun:

D: Die Menge aller Städte
V(G): $\{ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle : \mathbf{u}_1 \text{ ist größer als } \mathbf{u}_2 \}$ ²
V(a): Stuttgart
V(b): Tübingen

Die Menge $\{ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle : \mathbf{u}_1 \text{ ist größer als } \mathbf{u}_2 \}$ ist die *Extension* des Prädikatbuchstabens ‚G‘ unter **J**. Das geordnete Paar $\langle \text{Stuttgart, Tübingen} \rangle$ ist ein Element dieser Menge. Formal: $\langle \text{Stuttgart, Tübingen} \rangle \in \{ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle : \mathbf{u}_1 \text{ ist größer als } \mathbf{u}_2 \}$. Die geordneten Paare $\langle \text{Tübingen, Tübingen} \rangle$ und $\langle \text{Tübingen, Stuttgart} \rangle$ sind keine Elemente von **V(G)**. **V(a)**, d. h. Stuttgart, ist das *Denotat* (oder der Bezugsgegenstand) von ‚a‘, d. h. von ‚Stuttgart‘. (Entsprechend für Tübingen.) Die Extensionen von Prädikatbuchstaben und die Denotata von Individuenkonstanten sind deren *semantische Werte*.

Interpretation 2:

D: ‚... denkt nach über ...‘
a: ‚Prince William‘
b: ‚3‘

D: Die Menge aller Personen und Zahlen
V(G): $\{ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle : \mathbf{u}_1 \text{ denkt nach über } \mathbf{u}_2 \}$
V(a): Prince William
V(b): 3

Die geordneten Paare $\langle \text{Prince William, 3} \rangle$, $\langle \text{Prince William, Prince William} \rangle$ sind Elemente der Extension von ‚G‘ unter **J**, das 2-Tupel $\langle 3, 3 \rangle$ nicht.

11.1.2 Variablenbelegung für eine Interpretation

Die Wahrheit quantifizierter Sätze wird mit Hilfe der Semantik ihrer Teilformeln erklärt. Beispiel: Die Wahrheit von ‚ $(\exists x)Fx$ ‘ werden mit Hilfe der Semantik der Teilformel ‚ Fx ‘ erklärt. Aber ‚ Fx ‘ ist ein offener Satz. Offene Sätze sind weder *wahr*, noch *falsch* unter einer Interpretation von PL, da ihre Variablen unter einer Interpretation von PL keine (semantischen) Werte erhalten (siehe 11.1.1). Hier kommen Variablenbelegungen ins Spiel.

² Lies: „Die Menge aller 2-Tupel $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ derart, dass \mathbf{u}_1 größer ist als \mathbf{u}_2 “. Im Gegensatz zu den Symbolisierungsschlüsseln, die wir bislang verwendet haben, werden keine Variablen hinter die Prädikatbuchstaben geschrieben, wenn ihre Interpretationen angezeigt werden. Die Bewertung von Variablen wird nicht von **V** vorgenommen, sondern von einer eigens dafür vorgesehenen Funktion (siehe unten 11.1.2).

Variablenbelegungen ordnen den Variablen von PL Werte zu. Sie können offene Sätze wie ‚ Fx ‘ für gegebene Interpretationen *erfüllen* oder *nicht erfüllen*. Variablenbelegungen erlauben, die Wahrheit von Sätzen von PL zu definieren. Das geschieht in der Folgenden Weise: Mit Hilfe von Variablenbelegungen werden Erfüllungsbedingungen für die Formeln von PL definiert (siehe Definition 11.1.3.1). Anschließend wird mit Hilfe des Begriffs der Erfüllung die Wahrheit der Sätze von PL definiert.³

Definition 11.1.2.1 (Variablenbelegung \mathbf{d} für \mathbf{J}):

Eine **Variablenbelegung \mathbf{d} für eine Interpretation \mathbf{J}** ordnet jeder Individuenvariable von PL ein Element aus \mathbf{D} zu.

Dabei gilt:

1. Wenn eine Interpretation ein einelementiges \mathbf{D} hat, dann gibt es genau eine Variablenbelegung \mathbf{d} für \mathbf{J} : die Variablenbelegung, die jeder Individuenvariable von PL das einzige Element von \mathbf{D} zuordnet.
2. Wenn eine Interpretation mehr als ein Element in ihrem \mathbf{D} hat, dann wird es unendlich viele verschiedene Variablenbelegungen geben.
3. Es wird nicht verlangt, dass verschiedene Variablen verschiedenen Elementen von \mathbf{D} zugeordnet werden (vgl. die Beispiele in 10.4.2).
4. Es wird nicht verlangt, dass jedes Element von \mathbf{D} einer Variable zugeordnet wird.

Definition 11.1.2.2 (Wert einer Variablenbelegung \mathbf{d} für \mathbf{J}):

Wenn

- \mathbf{d} eine Variablenbelegung für \mathbf{J} ist und
- x eine Individuenvariable von PL,

dann bezeichnet $\mathbf{d}(x)$ das Element von \mathbf{D} , das \mathbf{d} der Variable x zuordnet. Dieses Element ist der **Wert der Variablenbelegung \mathbf{d} für \mathbf{J}** (d. h. $\mathbf{d}(x)$ ist der Funktionswert der Funktion \mathbf{d} für das Argument x).

³ Die hier vorgestellte Semantik für die Sprache PL ist eine sogenannte „Erfüllungssemantik“ (*satisfaction semantics*). (Diese Semantik wird auch „denotationelle“, „referentielle“ oder „modell-theoretische“ Semantik genannt.) Diese Art der Semantik, die als Standardsemantik für PL betrachtet werden kann, geht auf den polnischen Logiker Alfred Tarski zurück (*Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*. Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych, nr 34, Warszawa 1933. Deutsch: „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen“, *Studia Philosophica*, 1 (1936), 261-405. Englisch: „The concept of truth in formalized languages“, in A. Tarski *Logic, Semantics, Metamathematics*, 2nd edition, J. Corcoran (ed.), Hackett, Indianapolis, Ind., 1983, S. 152-278).

Beispiel: Wenn die Variablenbelegung \mathbf{d} für \mathbf{J} der Variable x die Zahl 3 zuordnet, dann ist $\mathbf{d}(x)$ die Zahl 3, d. h. $\mathbf{d}(x) = 3$.

Ist t eine Individuenkonstante, dann ist der Wert der Variablenbelegung \mathbf{d} für \mathbf{J} der Wert den diese Konstante unter der Bewertung \mathbf{V} der Interpretation \mathbf{J} erhält, d. h. $\mathbf{d}(t) = \mathbf{V}(t)$.

Für die Definition der Erfüllungsbedingungen der quantifizierten Formeln von PL wird der Begriff der Variante einer Variablenbelegung benötigt. Wenn \mathbf{d} eine Variablenbelegung für eine Interpretation \mathbf{J} ist, \mathbf{u} ein Element von \mathbf{D} und x eine Individuenvariable von PL, dann ist $\mathbf{d}[\mathbf{u}/x]$ eine Variablenbelegung, die jeder Variable von PL denselben Wert zuordnet wie sonst \mathbf{d} auch, nur mit dem Unterschied, dass sie x das Element \mathbf{u} zuordnet. $\mathbf{d}[\mathbf{u}/x]$ ist dann die Variante der Variablenbelegung \mathbf{d} für \mathbf{J} .

Definition 11.1.2.3 (Variante einer Variablenbelegung \mathbf{d} für \mathbf{J}):

Wenn

- \mathbf{d} eine Variablenbelegung für eine Interpretation \mathbf{J} ist,
- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ (nicht notwendigerweise verschiedene) Elemente aus dem \mathbf{D} der Interpretation sind, und
- x_1, x_2, \dots, x_n (nicht notwendigerweise verschiedene) Individuenvariablen von PL sind,

dann ist $\mathbf{d}[\mathbf{u}_1/x_1, \mathbf{u}_2/x_2, \dots, \mathbf{u}_n/x_n]$ die Variablenbelegung, die wie \mathbf{d} aussieht mit dem Unterschied, dass sie aus aufeinanderfolgenden Festlegungen resultiert, derart, dass \mathbf{u}_1 der Individuenvariable x_1 zugeordnet wird, \mathbf{u}_2 der Individuenvariable x_2, \dots und \mathbf{u}_n der Individuenvariable x_n .

Die Belegung $\mathbf{d}[\mathbf{u}_1/x_1, \mathbf{u}_2/x_2, \dots, \mathbf{u}_n/x_n]$ wird **Variante** der Belegung \mathbf{d} genannt.

Beispiel:

Sei \mathbf{J} eine Interpretation, die die Menge der positiven ganzen Zahlen als \mathbf{D} verwendet und sei \mathbf{d} eine Variablenbelegung, die jeder Individuenvariable von PL die Zahl 1 zuordnet.

Dann ist $\mathbf{d}[2/'x', 3/'z']$ die Variablenbelegung, die ‚ x' die 2 zuordnet, ‚ z' die 3 und allen anderen Individuenvariablen von PL die 1.

Konvention: Wir schreiben $\mathbf{d}[2/x, 3/z]$ für $\mathbf{d}[2/'x', 3/'z']$.

11.1.3 Wahrheit und Falschheit unter einer Interpretation

Wie bereits erwähnt, werden Wahrheit und Falschheit unter einer Interpretation nicht direkt definiert; vielmehr werden sie mit Hilfe des Begriffs der **Erfüllung** definiert (der seinerseits mit Hilfe von Variablenbelegungen erklärt wird).

Bevor wir den Begriff der Erfüllung definieren, müssen wir einige Metasprachliche Konventionen einführen.

Metasprachliche Konventionen:

- Metavariablen für Formeln von PL: A, B, C
- Metavariablen für Prädikatbuchstaben von PL: P
- Metavariablen für Individuenterme (Individuenkonstanten und Individuenvariablen) von PL:
 t (mit oder ohne Indices)
- Metavariablen für Individuenvariablen von PL: x
- $\mathbf{J}(X)$ für den Wert, den die Interpretation \mathbf{J} dem Symbol X zuordnet, wobei X eine Variable ist, die über die ersten drei Arten von Metavariablen „läuft“. (X ist somit eine Metametavariablen.) Bei $\mathbf{J}(A)$ s handelt es sich um Wahrheitswerte, wenn A Satzbuchstaben sind; bei $\mathbf{J}(P)$ s um Extensionen von Prädikaten, bei $\mathbf{J}(t)$ s um die Elemente von \mathbf{D} , die t unter \mathbf{J} und \mathbf{d} zugeordnet werden. (Diese Schreibweise ist vereinfachend. Genauer genommen steht $\mathbf{J}(A)$ (wenn A ein Satzbuchstabe ist) für $\mathbf{I}(A)$, $\mathbf{J}(P)$ für $\mathbf{V}(P)$, $\mathbf{J}(t)$ für $\mathbf{V}(t)$ (wenn t eine Individuenkonstante ist) und für $\mathbf{d}(t)$ (wenn t eine Individuenvariable ist) bezüglich der Interpretation \mathbf{J} .)

Wir sind nun in der Lage, den Begriff der Erfüllung einer Formel von PL zu definieren.

Definition 11.1.3.1 (Erfüllung von Formeln von PL):

Sei \mathbf{J} eine Interpretation, \mathbf{d} eine Variablenbelegung für \mathbf{J} und A eine Formel von PL. Dann haben wir

1. Wenn A ein Satzbuchstabe ist, dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn $\mathbf{J}(A) = \mathbf{w}$.
2. Wenn A eine atomare Formel der Form $P^n t_1 \dots t_n$ ist (wobei P^n ein n -stelliger Prädikatbuchstabe ist), dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ ein Element von $\mathbf{J}(P)$ ist, wobei $\mathbf{u}_i = \mathbf{J}(t_i)$ (dabei gilt: wenn t_i eine Individuenkonstante ist, dann ist $\mathbf{J}(t_i) = \mathbf{V}(t_i)$ und wenn t_i eine Individuenvariable ist, dann ist $\mathbf{J}(t_i) = \mathbf{d}(t_i)$).⁴
3. Wenn A die Form $\neg B$ hat, dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn \mathbf{d} B unter Interpretation \mathbf{J} nicht erfüllt.
4. Wenn A die Form $B \wedge C$ hat, dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn \mathbf{d} B unter Interpretation \mathbf{J} erfüllt und \mathbf{d} C unter Interpretation \mathbf{J} erfüllt.
5. Wenn A die Form $B \vee C$ hat, dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn \mathbf{d} B unter Interpretation \mathbf{J} erfüllt oder \mathbf{d} C unter Interpretation \mathbf{J} erfüllt.
6. Wenn A die Form $B \rightarrow C$ hat, dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn \mathbf{d} B unter Interpretation \mathbf{J} nicht erfüllt oder \mathbf{d} C unter Interpretation \mathbf{J} erfüllt.
7. Wenn A die Form $B \leftrightarrow C$ hat, dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn entweder \mathbf{d} B unter Interpretation \mathbf{J} erfüllt und \mathbf{d} C unter Interpretation \mathbf{J} erfüllt, oder \mathbf{d} B unter Interpretation \mathbf{J} nicht erfüllt und \mathbf{d} C unter Interpretation \mathbf{J} nicht erfüllt.
8. Wenn A die Form $(\forall x)B$ hat, dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn für jedes Element \mathbf{u} aus \mathbf{D} , die Variante $\mathbf{d}[\mathbf{u}/x]$ von \mathbf{d} die Teilformel B unter Interpretation \mathbf{J} erfüllt.
9. Wenn A die Form $(\exists x)B$ hat, dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn es mindestens ein Element \mathbf{u} aus \mathbf{D} gibt derart, dass die Variante $\mathbf{d}[\mathbf{u}/x]$ von \mathbf{d} die Teilformel B unter Interpretation \mathbf{J} erfüllt.

⁴ Somit erfüllt \mathbf{d} etwa ‚Gxa‘, wenn $\langle \mathbf{d}(x), \mathbf{V}(a) \rangle$ – das 2-Tupel dessen erstes Element das Objekt ist, das \mathbf{d} der Variable ‚x‘ zuordnet und dessen zweites Element das Objekt ist, das \mathbf{V} der Konstante ‚a‘ zuordnet – ein Element von $\mathbf{V}(G)$ ist, d.h. der Extension, die \mathbf{V} dem Prädikat ‚G‘ zuordnet.

(Erfüllungsbedingungen werden oftmals auch „Wahrheitsbedingungen“ genannt. Man nimmt dann an, dass zu sagen, dass ein Ding ein Prädikat erfüllt dasselbe meint wie zu sagen, dass ein Prädikat von einem Ding wahr ist.)

Nun sind wir auch in der Lage, die Begriffe der Wahrheit und der Falschheit unter einer Interpretation zu definieren:

Definition 11.1.3.2 (Wahrheit unter einer Interpretation):

Ein Satz A von PL ist **wahr unter einer Interpretation J** genau dann, wenn jede Variablenbelegung d (für J) A unter J erfüllt.

Definition 11.1.3.3 (Falschheit unter einer Interpretation):

Ein Satz A von PL ist **falsch unter einer Interpretation J** genau dann, wenn keine Variablenbelegung d (für J) A unter J erfüllt.

Für jeden Satz A von PL und für jede Interpretation J gilt:

Entweder erfüllen alle Variablenbelegungen d für J Satz A oder keine. (Im Allgemeinen gilt das für **offene** Sätze nicht.) Da das der Fall ist, ist gemäß der angegebenen Definitionen jeder Satz unter jeder beliebigen Interpretation wahr oder falsch. Somit gilt das Bivalenzprinzip auch für PL.

11.1.4 Illustration

Das folgende Beispiel illustriert, wie z.B. die Falschheit eines bestimmten Satzes von PL unter einer Interpretation mit Hilfe des Begriffs der Erfüllung gezeigt werden kann.

Beispielsatz: $(\forall y)(Py \rightarrow \neg(\exists z)Dyz)$

Interpretation 1

Interpretation 1: Diese Interpretation sieht wie folgt aus

D: Die Menge der positiven ganzen Zahlen
V(P): $\{ \langle u \rangle: u \text{ ist eine Primzahl} \}$
V(G): $\{ \langle u_1, u_2 \rangle: u_1 \text{ ist größer als } u_2 \}$

Nach dieser Interpretation ist, der Beispielsatz falsch. Er behauptet:

„Jede positive ganze Zahl y ist derart, dass wenn sie eine Primzahl ist, es dann keine positive ganze Zahl gibt derart, dass y größer ist als diese“

Wenn wir zeigen wollen, dass der Satz falsch ist, müssen wir (gemäß Definition 11.1.2.2) zeigen, dass keine Variablenbelegung \mathbf{d} (für \mathbf{J}) den Satz erfüllt. Das kann mit Hilfe der Definition 11.1.3.1 Schritt für Schritt gezeigt werden.

Demonstration der Falschheit des Beispielsatzes unter der Interpretation 1:

Sei \mathbf{d} eine beliebige Variablenbelegung für \mathbf{J} .

Nach *Klausel 8* gilt:

- (i) \mathbf{d} erfüllt $(\forall y)(Py \rightarrow \neg(\exists z)Gyz)$ genau dann, wenn für jedes Element \mathbf{u} aus \mathbf{D} , $\mathbf{d}[\mathbf{u}/y]$ die Teilformel $(Py \rightarrow \neg(\exists z)Gyz)$ erfüllt.

Kommentar:

Es müssen alle möglichen Werte in Betracht gezogen werden, die y zugeordnet werden können und nicht nur der Wert, den \mathbf{d} selbst y zuordnet. D. h. $\mathbf{d}[1/y]$ muss diesen offenen Satz erfüllen, $\mathbf{d}[2/y]$ muss diesen offenen Satz erfüllen, $\mathbf{d}[3/y]$ muss diesen offenen Satz erfüllen und so weiter für jede positive ganze Zahl.

Aber $\mathbf{d}[2/y]$ erfüllt $(Py \rightarrow \neg(\exists z)Gyz)$ nicht:

Nach *Klausel 6* gilt:

- (ii) $\mathbf{d}[2/y]$ erfüllt $(Py \rightarrow \neg(\exists z)Gyz)$ genau dann, wenn entweder $\mathbf{d}[2/y]$ Py nicht erfüllt, oder $\mathbf{d}[2/y]$ $\neg(\exists z)Gyz$ erfüllt.

Nach *Klausel 2* gilt:

- (iii) $\mathbf{d}[2/y]$ erfüllt Py genau dann, wenn $\langle \mathbf{d}[2/y](y) \rangle$ ein Element von $\mathbf{J}(P)$ ist.

Kommentar:

Das 1-Tupel $\langle \mathbf{d}[2/y](y) \rangle$ ist der Wert, den die Variante $\mathbf{d}[2/y]$ der Variable y zuordnet, nämlich $\langle 2 \rangle$.

$\mathbf{J}(P)$ ist die Menge von 1-Tupeln von positiven ganzen Zahlen, die Primzahlen sind, d. h. die Extension von P , nämlich $\{\langle \mathbf{u} \rangle: \mathbf{u} \text{ ist eine Primzahl}\}$.

Da $\langle 2 \rangle \in \{\langle \mathbf{u} \rangle: \mathbf{u} \text{ ist eine Primzahl}\}$, erfüllt $\mathbf{d}[2/y]$ Py !

Nach *Klausel 3* gilt:

- (iv) $\mathbf{d}[2/y]$ erfüllt $\neg(\exists z)Gyz$ genau dann, wenn sie $(\exists z)Gyz$ nicht erfüllt.

Nach *Klausel 9* gilt dann:

- (v) $\mathbf{d}[2/y]$ erfüllt $(\exists z)Gyz$ genau dann, wenn es mindestens ein Element \mathbf{u} von \mathbf{D} gibt derart, dass $\mathbf{d}[2/y, \mathbf{u}/z]$ Gyz erfüllt.

Kommentar:

Es muss ein Element \mathbf{u} in \mathbf{D} geben, das kleiner ist als 2. Das ist der Fall. Es ist die 1. Die relevante Variablenbelegung ist also $\mathbf{d}[2/y, 1/z]$.

Nach *Klausel 2* gilt:

- (vi) $\mathbf{d}[2/y, 1/z]$ erfüllt ' Gyz ' genau dann, wenn das geordnete Paar $\langle \mathbf{d}[2/y, 1/z](y), \mathbf{d}[2/y, 1/z](z) \rangle$ ein Element von $\mathbf{J}(\text{G})$ ist.

Kommentar:

Das 2-Tupel $\langle \mathbf{d}[2/y, 1/z](y), \mathbf{d}[2/y, 1/z](z) \rangle$ ist der Wert, den die Variante $\mathbf{d}[2/y, 1/z]$ den Variablen $,y'$ und $,z'$ zuordnet, nämlich $\langle 2, 1 \rangle$.

$\mathbf{J}(\text{G})$ ist die Menge von 2-Tupeln von positiven ganzen Zahlen, derart, dass die erste größer ist als die zweite, d. h. die Extension von $,\text{G}'$, nämlich $\{ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle : \mathbf{u}_1 \text{ ist größer als } \mathbf{u}_2 \}$.

Da $\langle 2, 1 \rangle \in \{ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle : \mathbf{u}_1 \text{ ist größer als } \mathbf{u}_2 \}$, erfüllt $\mathbf{d}[2/y, 1/z]$ $,\text{Gyz}'$!

Wenn wir nun zu Schritt (v) zurückkehren, zeigt dies, dass $\mathbf{d}[2/y]$ $,(\exists z)\text{Gyz}'$ erfüllt. Somit erfüllt $\mathbf{d}[2/y]$ nach Schritt (iv) $,\neg(\exists z)\text{Gyz}'$ nicht.

Wir haben nun eine Variablenbelegung, $\mathbf{d}[2/y]$, die $,\text{Py}'$ erfüllt, aber die $,\neg(\exists z)\text{Gyz}'$ nicht erfüllt.

Somit erfüllt $\mathbf{d}[2/y]$ nach Schritt (ii) $,(\text{Py} \rightarrow \neg(\exists z)\text{Gyz})'$ nicht. (D. h. Die Zahl 2 ist **nicht** derart, dass wenn sie eine Primzahl ist, sie dann nicht größer ist als jede positive ganze Zahl.)

Somit erfüllt \mathbf{d} nach Schritt (i) $,(\forall y)(\text{Py} \rightarrow \neg(\exists z)\text{Gyz})'$ nicht, weil es eine Variante von \mathbf{d} gibt, die den offenen Satz, der auf den Allquantor folgt *nicht erfüllt!*

Somit ist (nach der Definition der Falschheit eines Satzes unter einer Interpretation 11.1.3.3) der Satz $,(\forall y)(\text{Py} \rightarrow \neg(\exists z)\text{Gyz})'$ unter Interpretation 1 *falsch*, weil wir gezeigt haben, dass es eine Variablenbelegung \mathbf{d} für \mathbf{J} gibt, die $,(\forall y)(\text{Py} \rightarrow \neg(\exists z)\text{Gyz})'$ nicht erfüllt und es aufgrund der Bivalenz somit keine Variablenbelegung gibt, die diesen Satz erfüllt.

Beobachtung: Die Werte, die \mathbf{d} selbst den Variablen $,y'$ und $,z'$ zuordnet, haben keine Rolle gespielt, als wir gezeigt haben, dass \mathbf{d} den Satz $,(\forall y)(\text{Py} \rightarrow \neg(\exists z)\text{Gyz})'$ nicht erfüllt. Es macht keinen Unterschied mit welcher Variablenbelegung wir beginnen, da wir, nachdem wir die Quantoren beseitigt haben, Varianten in Betracht ziehen mussten, die den auf diese Weise entstandenen freien Variablen explizit Werte zugeordnet haben. Somit können wir schließen, dass ganz gleich welche Variablenbelegung \mathbf{d} wir wählen, \mathbf{d} den Satz nicht erfüllen wird.

Interpretation 2

Der Satz $(\forall y)(Py \rightarrow \neg(\exists z)Gyz)$ ist unter der folgenden Interpretation jedoch wahr:

D:	Die Menge $\{2, 4\}$
V(P):	$\{<\mathbf{u}>: \mathbf{u} \text{ ist eine Primzahl}\}$
V(G):	$\{<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2>: \mathbf{u}_1 \text{ ist größer als } \mathbf{u}_2\}$

Das lässt sich in einer entsprechenden Weise zeigen.

11.2 Formale Semantik von PLI

Man erhält die Erfüllungsbedingungen für PLI, indem man Definition 11.1.3.1 (Erfüllung einer Formel von PL) die folgende Klausel hinzugefügt:

Definition 11.2 (Klausel für Identitätsformeln):

10. Wenn A ein atomarer Satz der Form $t_1 = t_2$ ist, dann erfüllt \mathbf{d} A unter Interpretation \mathbf{J} genau dann, wenn $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, wobei $\mathbf{u}_i = \mathbf{J}(t_i)$ (dabei gilt: wenn t_i eine Individuenkonstante ist, dann ist $\mathbf{J}(t_i) = \mathbf{V}(t_i)$ und wenn t_i eine Individuenvariable ist, dann ist $\mathbf{J}(t_i) = \mathbf{d}(t_i)$).

Diese Klausel definiert in impliziter Weise eine Extension für das Identitätsprädikat. Die Extension dieses Prädikats schließt $<\mathbf{u}, \mathbf{u}>$ für jedes Element \mathbf{u} von \mathbf{D} ein, und das ist alles, was sie einschließt. In den Definitionen aus Abschnitt 11.1 ist dann ‚PL‘ durch ‚PLI‘ zu ersetzen.

11.3 Logische Eigenschaften und Relationen (PL/PLI)

Die Definition der Wahrheit eines Satzes von PL/PLI (Definitionen 11.1.3.2 und 11.1.3.3) erlaubt uns nun die logischen Eigenschaften und Relationen für PL/PLI zu definieren.

Definition 11.3.1 (Quantifikationelle Wahrheit):

Ein Satz A von PL/PLI ist **quantifikationell wahr** genau dann, wenn A unter jeder Interpretation wahr ist.

Definition 11.3.2 (Quantifikationelle Falschheit):

Ein Satz A von PL/PLI ist **quantifikationell falsch** genau dann, wenn A unter jeder Interpretation falsch ist.

Defintion 11.3.3 (Quantifikationelle Indeterminiertheit):

Ein Satz A von PL/PLI ist **quantifikationell indeterminiert** genau dann, wenn A weder quantifikationell wahr, noch quantifikationell falsch ist.

Defintion 11.3.4 (Quantifikationelle Äquivalenz):

Die Sätze A und B von PL/PLI sind **quantifikationell äquivalent** genau dann, wenn es keine Interpretation gibt, unter der A und B verschiedene Wahrheitswerte haben.

Defintion 11.3.5 (Quantifikationelle Konsistenz und Inkonsistenz):

Eine Menge von Sätzen von PL/PLI ist **quantifikationell konsistent** genau dann, wenn es mindestens eine Interpretation gibt unter der alle Elemente dieser Menge wahr sind.

Eine Menge von Sätzen von PL/PLI ist **quantifikationell inkonsistent** genau dann, wenn die Menge nicht quantifikationell konsistent ist.

Defintion 11.3.6 (Quantifikationelle Folgerung/Gültigkeit):

Satz A von PL/PLI ist eine **quantifikationelle Folgerung** aus einer Menge Γ von Sätzen von PL genau dann, wenn es keine Interpretation gibt unter der jedes Element von Γ wahr ist und A falsch ist.

11.4 Zur Entscheidbarkeit

Die Prädikatenlogik hat gegenüber der Aussagenlogik den Vorteil, dass die Sprache PL ausdrucksstärker ist als die Sprache AL. Der Nachteil der Prädikatenlogik gegenüber der Aussagenlogik ist aber, dass kein effektives Entscheidungsverfahren für die quantifikationellen Eigenschaften und Relationen von Sätzen von PL erhältlich ist (siehe z.B. Alonso Church „A note on the *Entscheidungsproblem*“). Ein solches Verfahren ist aber für die wahrheitsfunktionalen Eigenschaften und Relationen von Sätzen von AL zu haben. Die Wahrheitstafelmethode oder das Tableauverfahren sind effektive Entscheidungsverfahren. Sie erlauben uns, in einer endlichen Abfolge von Schritten zu entscheiden, ob ein Satz z.B. wahrheitsfunktional wahr ist oder nicht. In PL müssen wir von Fall zu Fall nach Interpretationen suchen. Eine derartige Suche lässt sich nicht „mechanisieren“.

<<<