12. PRÄDIKATENLOGIK:

NATÜRLICHES SCHLIESSEN [1]

12.1 Einführung

In diesem Kapitel wird ein System des natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik vorgestellt. Die Ableitungsregeln dieses Systems (KNSPL) erlauben, Sätze aus Sätzen allein aufgrund ihrer syntaktischen Struktur abzuleiten. Wenn die Semantik von PL, die in Kapitel 11 vorgestellt worden ist, zugrunde gelegt wird, erweisen sich die Ableitungsregeln von KNSPL als wahrheitserhaltend. Mit Hilfe von KNSPL können Sätze, Satzmengen und Argumente auf ihre logischen Eigenschaften und Relationen hin überprüft werden.

12.2 Das System KNSPL

Die Ableitungsregeln von KNSPL beinhalten alle Ableitungsregeln von KNSAL (siehe Kapitel 7) und die folgenden vier Regeln (sortiert nach ihrem Komplexitätsgrad):

- Allquantorbeseitigung (∀B)
- Existenzquantoreinführung (∃E)
- Allquantoreinführung (∀E)
- Existenzquantorbeseitigung (∃B)

12.2.1 Allquantorbeseitigung (∀B)

Betrachten wir das folgende Argument.

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
____
Sokrates ist sterblich.

[1] Korrektur zu Kapitel 11: In Definition 11. 2 muss es natürlich heißen (Sie ahnten es wohl bereits), dass *A* eine atomare Formel ist.

In diesem Argument wird von einer universalen Behauptung, nämlich der Behauptung der Sterblichkeit aller Dinge, die ein Mensch sind (Prämisse 1), auf eine spezielle Einsetzungsinstanz dieser allgemeinen Behauptung geschlossen, nämlich auf die Behauptung, dass Sokrates sterblich ist, wenn er ein Mensch ist. Die ∀B-Regel rechtfertigt solche Übergänge von allquantifizierten Sätzen zu ihren Einsetzungsinstanzen. Im vorliegenden Argument kann dann die →B-Regel auf diese Einsetzungsinstanz und die zweite Prämisse angewendet und so die Konklusion erreicht werden. Die entsprechende Ableitung in KNSPL sieht dann wie folgt aus.

<u>Ableitung in KNSPL:</u>

Ableitungsziel: Ss

1	|	(∀x)(Mx → Sx)	Annahme
2	|	<u>Ms</u>	Annahme
3	|	Ms → Ss	1 ∀B
4	|	Ss	2, 3 →B

Der Satz in Zeile 3 ist eine Einsetzungsinstanz des Satzes aus Zeile 1. Hier ist noch einmal die Definition des Begriffs der Einsetzungsinstanz eines quantifizierten Satzes.

> Definition 8.15 (Einsetzungsinstanz eines q. S.):
>
> Wenn A ein Satz von PL ist mit der Form $(\forall x)B$ oder $(\exists x)B$ und a eine Individuenkonstante, dann ist $B(a/x)$ eine **Einsetzungsinstanz** von A. Dabei ist die Konstante a die instantiierende Konstante.[2]

Bei der Bildung einer Einsetzungsinstanz eines quantifizierten Satzes lassen wir, gemäß der Definition, den Anfangsquantor fallen und ersetzen alle verbleibenden Vorkommnisse der Variable, die dieser Quantor enthält, mit einer bestimmten Konstante. Somit ist ‚Ms → Ss' eine Einsetzungsinstanz von ‚(∀x)(Mx → Sx)'.

Im Allgemeinen gilt: Die Ableitungsregel der Allquantorbeseitigung erlaubt, eine Einsetzungsinstanz eines allquantifizierten Satzes aus einem allquantifizierten Satz abzuleiten. Das folgende Schema gibt diese Regel wieder:

> **Allquantorbeseitigung (∀B)**:
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | | \| | $(\forall x)A$ |
> | | \| | |
> | > | \| | $A(a / x)$ |

[2] Der Ausdruck ‚$B(a/x)$' wird bekanntlich als‚B mit a an Stelle von x' gelesen.

12.2.2 Existenzquantoreinführung (∃E)

Betrachten wir nun das folgende Argument.

Sokrates ist ein nachdenklicher Mensch.

Es gibt mindestens einen nachdenklichen Menschen.

Die Konklusion folgt aus der Prämisse, da sie eine Generalisierung eines Spezialfalls ist. Dieser Schlusstyp wird in KNSPL durch die Regel der Existenzquantoreinführung (∃E) wiedergegeben. Die ∃E-Regel, erlaubt entsprechend, einen existenzquantifizierten Satz aus einer Einsetzungsinstanz dieses Satzes abzuleiten. Das obige Argument lässt sich wie folgt als Ableitung in KNSPL wiedergeben.

Ableitungsziel: $(\exists x)(Mx \wedge Nx)$

1	|	$\underline{Ms \wedge Ns}$	Annahme
2	|	$(\exists x)(Mx \wedge Nx)$	1 ∃E

Die Regel der Existenzquantoreinführung lautet nun wie folgt:

Existenzquantoreinführung (∃E):

	|	$A(a\,/\,x)$
	|	
>	|	$(\exists x)A$

∃E verlangt nicht, dass jedes Vorkommnis einer gegebenen Individuenkostante generalisiert wird. Zur Illustration folgen korrekte Anwendungsfälle dieser Regel.

1	|	$\underline{Gss}$	Annahme
2	|	$(\exists x)Gxx$	1 ∃E

1	|	$\underline{Gss}$	Annahme
2	|	$(\exists x)Gxs$	1 ∃E

1	|	$\underline{Gss}$	Annahme
2	|	$(\exists x)Gsx$	1 ∃E

‚Gss' ist also eine Einsetzungsinstanz von ‚(∃x)Gxx', von ‚(∃x)Gxs' und von ‚(∃x)Gsx'. (Beispiel: ‚Gxx' für ‚x ist ebenso groß wie x' und ‚s' für ‚Sokrates'.)

12.2.3 Allquantoreinführung (∀E)

Betrachten wir das folgende Argument.

> Jeder Mensch ist ein sterbliches Wesen.
> Jedes sterbliche Wesen ist ein Lebewesen.
> ___
> Jeder Mensch ist ein Lebewesen.

Informal können wir zeigen, dass die Konklusion des Arguments aus den Prämissen folgt, indem wir über ein bestimmtes Individuum nachdenken, z.B. Sokrates.

> Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist er ein sterbliches Wesen.
> Wenn Sokrates ein sterbliches Wesen ist, dann ist er ein Lebewesen.
> ___
> Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist er ein Lebewesen.

Zu diesem Zweck hätte jedes andere Ding ausgewählt werden können, nicht nur Sokrates (z.B. Otto Rehagel, Ingeborg Bachmann oder Schumis Ferrari) und die Argumentation hätte in einer ähnlichen Weise durchgeführt werden können. Kurz: Obwohl wir über ein spezifisches Individuum nachgedacht haben, ist das Ergebnis völlig allgemein, insofern es auf jedes Individuum zutreffen würde. Keine spezielle Information über Sokrates (Otto, Ingeborg oder was auch immer) ist verwendet worden. Somit können wir auf die Behauptung generalisieren, dass wenn ein Ding ein Mensch ist, dieses Ding ein Lebewesen ist.

Das obige Argument lässt sich wie folgt als Ableitung in KNSPL wiedergeben.

Ableitungsziel: $(\forall x)(Mx \rightarrow Lx)$

1	| $(\forall x)(Mx \rightarrow Sx)$	Annahme
2	| $\underline{(\forall x)(Sx \rightarrow Lx)}$	Annahme
3	| $Ms \rightarrow Ss$	1 ∀B
4	| $Ss \rightarrow Ls$	2 ∀B
5	| | $\underline{Ms}$	Annahme
6	| | Ss	3, 5 →B
7	| | Ls	4, 6 →B
8	| $Ms \rightarrow Ls$	5-7 →E
9	| $(\forall x)(Mx \rightarrow Lx)$	8 ∀E

Es wird deutlich, dass die Allquantoreinführungsregel (∀E) eine Schlussregel ist, die die Ableitung eines allquantifizierten Satzes aus einer willkürlich gewählten (und nur aus einer willkürlich gewählten!) Einsetzungsinstanz dieses Satzes erlaubt.

Bei der Anwendung von ∀E sind aber zwei Bedingungen zu berücksichtigen. Diese Bedingungen werden in der Formulierung des Schemas für diese Regel angegeben:

Allquantoreinführung (∀E):

	|	$A(a / x)$
	|	
>	|	$(\forall x)A$

unter der Bedingung, dass:

(i) *a* nicht in einer ungelöschten Annahme vorkommt.
(ii) *a* nicht in $(\forall x)A$ vorkommt.

Zur Illustration dieser Bedingungen zwei Beispiele.

Zu Einschränkung (i):

Die erste Einschränkung verlangt, dass die relevante Individuenkonstante in keiner ungelöschten Annahme vorkommen darf. In der obigen Ableitung wurde Einschränkung (i) berücksichtigt, da ‚s' in Zeile 5 in einer Hilfsannahme vorkommt, die in Zeile 8 gelöscht worden ist. In den folgenden Beispielen wird diese Einschränkung aber verletzt. (Primäre Annahmen sind trivialerweise ungelöscht, weil sie nicht löschbar sind.)

1	| Vg	Annahme	
2	| (∀x)Vx	1 ∀E	**FEHLER!**

1	| Va	Annahme	
2	| | Vg	Annahme	
3	| | (∀x)Vx	2∀E	**FEHLER!**
4	| Vg → (∀x)Vx	2-3 →E	

(Beispiel: ‚Vx' für ‚x ist verwirrt', ‚a' für ‚Angela',g' für ‚Gerhard'.)

Zu Einschränkung (ii):

Die zweite Einschränkung sagt uns, dass die relevante Individuenkonstante in dem resultierenden allquantifizierten Satz nicht vorkommen darf:

1	| (∀x)Gxx	Annahme	
2	| Ggg	1 ∀B	
3	| (∀x)Gxg	2 ∀E	**FEHLER!**

(Beispiel: ‚Gxx' für ‚x hat dasselbe Gewicht wie x' und ‚g' für ‚Gehrhard'.)

Die Regel wird im letzten Beispiel von Abschnitt 12.3 korrekt befolgt, da dort Einschränkung (ii) berücksichtigt wird (siehe unten).

12.2.4 Existenzquantorbeseitigung

Betrachten wir das folgende Argument.

> Wenn jemand komisch ist, dann ist es Otto.
> Jemand ist komisch.
> ____
> Otto ist komisch.

Ableitung in KNSPL:

Ableitungsziel: Ko

1	|	$(\exists x)Kx \rightarrow Ko$	Annahme
2	|	$\underline{(\exists x)Kx}$	Annahme
3	|	Ko	1, 2 $\rightarrow$B

In dieser Ableitung wurde die Regel der Existenzquantorbeseitigung nicht angewendet. Die erste Prämisse des obigen Arguments lässt sich aber äquivalenterweise wie folgt symbolisieren

$(\forall x)(Kx \rightarrow Ko)$

Wird eine solche Symbolisierung gewählt, dann kommt die Regel der Existenzquantorbeseitigung zum Zuge; die Ableitung wird dann etwas komplizierter.

1	|	$(\forall x)(Kx \rightarrow Ko)$	Annahme
2	|	$\underline{(\exists x)Kx}$	Annahme
3	|		

Die Ableitung des Ableitungsziels ‚Ko' in KNSPL lässt sich anhand der folgenden informalen Argumentation intuitiv motivieren.

Informale Argumentation:

1. Prämisse 2 sagt, dass es etwas gibt, das komisch ist. (Sie sagt aber nicht, was es ist.)
2. Annahme: Loriot ist komisch.
3. Aus Prämisse 1 schließen wir: Wenn Loriot komisch ist, dann ist Otto komisch.
4. Aus Schritt 2 und Schritt 3 schließen wir: Otto ist komisch.

Die Konklusion (Schritt 4) wird auf der Grundlage der Annahme gewonnen, dass Loriot komisch ist (was falsch sein mag). Wichtig ist aber, dass die Bezugnahme auf Loriot in dieser informalen Argumentation eine rein vermittelnde Rolle eingenommen hat, die von jedem anderen Individuum (z.B. Ingeborg Bachmann oder dem Münchener Olympiastadion) hätte erfüllt werden können. Entscheidend ist, dass Prämisse 2 garantiert, dass es mindestens ein Individuum gibt, das komisch ist; wir können deshalb sicher sein, dass die Konklusion folgt und dass sie nicht von der Annahme abhängt, dass Loriot (oder sonst etwas) dasjenige Ding ist, das komisch ist.

In KNSPL drückt die Regel der Existenzquantorbeseitigung eben diesen Schlusstyp aus. Das obige Argument lässt sich wie folgt als Ableitung in KNSPL wiedergeben.

Ableitungsziel: Ko

1	$\mid$	$(\forall x)(Kx \rightarrow Ko)$	Annahme
2	$\mid$	$\underline{(\exists x)Kx}$	Annahme
3	$\mid$	$\mid\quad \underline{K\mathbf{l}}$	Annahme
4	$\mid$	$\mid\quad K\mathbf{l} \rightarrow Ko$	1 $\forall$B
5	$\mid$	$\mid\quad Ko$	3, 4 $\rightarrow$B
6	$\mid$	Ko	2, 3-5 $\exists$B

Das Schema für die $\exists$B-Regel sieht nun wie folgt aus.

Existenzquantorbeseitigung ($\exists$B):

	$\mid$	$(\exists x)A$
	$\mid$	$\mid\quad \underline{A(a / x)}$
	$\mid$	$\mid\quad B$
>	$\mid$	B

unter der Bedingung, dass:

(i) *a* nicht in einer ungelöschten Annahme vorkommt
(ii) *a* nicht in $(\exists x)A$ vorkommt.
(iii) *a* nicht in *B* vorkommt.

Folgendes ist zu beachten: Satz *B* muss als letzter Satz der Teilableitung unmittelbar hinter der Bereichslinie der Teilableitung erscheinen.

Die Einschränkungen (i) – (iii) stellen sicher, dass die instantiierende Konstante, die in der Hilfsannahme zum Einsatz kommt, nur eine vermittelnde Rolle spielt. Die folgenden Beispiele illustrieren die Einschränkungen:

<u>Zu Einschränkung (i):</u> Verletzung von (i)

1	$\mid$	$W\mathbf{m}$	Annahme	
2	$\mid$	$\underline{(\exists x)Sx}$	Annahme	
3	$\mid$	$\mid\quad \underline{Sm}$	Annahme	
4	$\mid$	$\mid\quad Wm \wedge Sm$	1, 3 $\wedge$E	
5	$\mid$	$\mid\quad (\exists x)(Wx \wedge Sx)$	4 $\exists$E	
6	$\mid$	$(\exists x)(Wx \wedge Sx)$	2, 3-5 $\exists$B	**FEHLER!**

(Beispiel: ‚Sx' für ‚x ist gänzlich schwarz', ‚Wx' für ‚x ist gänzlich weiss' und ‚m' für ‚Fury'.)

Zu Einschränkung (ii): Verletzung von (ii)

1	$\underline{(\forall x)(\exists y)Gyx}$	Annahme	
2	$(\exists y)Gy\mathbf{s}$	1 ∀B	
3	$\vert\ \underline{Gss}$	Annahme	
4	$\vert\ (\exists x)Gxx$	3 ∃E	
5	$(\exists x)Gxx$	2, 3-4 ∃B	**FEHLER!**

(Beispiel: ‚Gxy' für ‚x ist größer als y' und ‚s' für ‚7'.)

Zu Einschränkung (iii): Verletzung von (iii)

1	$\underline{(\exists x)Mx}$	Annahme	
2	$\vert\ \underline{Mc}$	Annahme	
3	$\vert\ M\mathbf{c}$	2 R	
4	$M\mathbf{c}$	1, 2-3 ∃B	**FEHLER!**

(Beispiel: ‚Mx' für ‚x ist ein Mann' und ‚c' für ‚Claudia Schiffer'.)

12.3 Zur Anwendung der Ableitungsregeln von KNSPL

Die im vorigen Abschnitt eingeführten Quantorenregeln sind Schlussregeln, die auf **ganze Sätze** angewendet werden müssen, die in früheren Zeilen vorkommen und – im Falle der Existenzquantorbeseitigung – auch auf **ganze Teilableitungen**.

Fehlerquellen (Anwendung auf Teilformeln):

1	$\underline{(\forall x)Sxk \rightarrow Mk}$	Annahme	
2	$Shk \rightarrow Mk$	1 ∀B	**FEHLER!**

(Beispiel: ‚Sxy' für ‚x stimmt für y', ‚x wird Ministerpräsident', ‚h' für ‚Horst-Dieter', ‚k' für ‚Roland Koch'.)

1	$\underline{\neg(\forall x)Mx}$	Annahme	
2	$\neg Mk$	1 ∀B	**FEHLER!**

(Beispiel: ‚Mx' für ‚x wird Ministerpräsident' und ‚k' für ‚Roland Koch'.)

Zur Illustration der Anwendung der Quantorenregeln folgt ein Beispiel, in dem alle Quantorenregeln bis auf (∃B) vorkommen. (Für die Anwendung der ∃B-Regel siehe das Beispiel in Abschnitt 12.7.)

Jeder liebt einen Liebenden. (Liebender = einer/e, der/die jemanden liebt)
Trude liebt Albert.

Jeder liebt jeden.

Abzuleiten ist: (∀x)(∀y)Lxy

1	|	(∀z)(∀y)((∃w)Lyw → Lzy)	Annahme	
2	|	Lta	Annahme	
3	|	(∃w)Ltw	2 ∃E	
4	|	(∀y)((∃w)Lyw → Ljy)	1 ∀B	[j / z]
5	|	(∃w)Ltw → Ljt	4 ∀B	[t / y]
6	|	Ljt	3, 5 →B	
7	|	(∃w)Ljw	6 ∃E	
8	|	(∀y)((∃w)Lyw → Lky)	1 ∀B	[k / z]
9	|	(∃w)Ljw → Lkj	8 ∀B	[j / y]
10	|	L**kj**	7, 9 →B	
11	|	(∀y)Lky	10 ∀E	
12	|	(∀x)(∀y)Lxy	11 ∀E	

<u>Kommentar:</u>

Aufgrund der Einschränkung (i) darf die ∀E-Regel weder auf ‚Lta' (Zeile 2) noch auf ‚Ljt' (Zeile 6) angewendet werden, um das Ableitungsziel zu erreichen. Für die Ableitung von ‚(∀x)(∀y)Lxy' muss zuerst ein atomarer Satz mit dem Prädikat ‚L' und mit zwei Individuenkonstanten abgeleitet werden, die nicht in einer Annahme vorkommen: ‚Lkj' (Zeile 10). Auf diesen Satz kann die ∀E- Regel dann zweimal angewendet werden, um ans Ziel zu kommen.

Wir können mit der Konklusion des obigen Arguments wie folgt argumentieren:

Jeder liebt jeden.

Jeder liebt sich selbst

Abzuleiten ist: (∀x)Lxx

1	|	(∀x)(∀y)Lxy	Annahme	
2	|	(∀y)Lay	1 ∀B	[a / x]
3	|	Laa	2 ∀B	[a / y]
4	|	(∀x)Lxx	3 ∀E	

Es ist zu beachten, dass im letzten Schritt Bedingung (ii) der Allquantoreinführung nicht verletzt wird.

12.4 Das System KNSPL+

Gegenüber KNSPL hat KNSPL+ eine größere Regelmenge. Aber die zusätzlichen Regeln erlauben uns nicht, mehr abzuleiten als in KNSPL abgeleitet werden kann. KNSPL+ hat lediglich den Vorteil, dass die Ableitungen kürzer werden.

KNSPL+ enthält:

1. alle Ableitungsregeln von KNSAL+.
2. alle Ableitungsregeln von KNSPL (d.h. ∀B, ∀E, ∃B, ∃E)
3. die Quantorennegationsregeln (siehe unten)

Zu 1: Regeln von KNSAL+

Die Regeln von KNSAL+ (!) sind nun auf Sätze von PL anzuwenden. Dabei können die Ersetzungsregeln – im Gegensatz zu den Schlussregeln – sowohl auf Teilformeln von Sätzen von PL als auch auf Sätze von PL angewendet werden.

Illustraton:

1	|	(∀x)[Mx ∨ (Kx ∨ (∃y)Nxy)]	Annahme
2	|	(∀x)[Mx ∨ ((∃y)Nxy ∨ Kx)]	1 Kom
3	|	(∀x)[(Mx ∨ (∃y)Nxy) ∨ Kx)]	2 Assoz.
4	|	(∀x)[(¬¬Mx ∨ (∃y)Nxy) ∨ Kx)]	3 DN
5	|	(∀x)[(¬Mx → (∃y)Nxy) ∨ Kx)]	4 Impl
5	|	(∀x)[(¬ (∃y)Nxy → ¬¬Mx) ∨ Kx)]	4 Transp

Zu 3: Quantorennegationsregeln

Die einzigen zusätzlichen Quantorenregeln von KNSPL+ sind die **Quantorennegationsregeln**. Es sind Ersetzungsregeln und können deshalb auch auf Teilformeln angewendet werden:

> Wenn *A* ein offener Satz von PL ist, in dem *x* frei vorkommt, lautet die Regel:
>
> **Quantorennegationsregeln (QN)**:
>
> ¬(∀*x*)*A* ist logisch äquivalent mit (∃*x*)¬*A*
>
> ¬(∃*x*)*A* ist logisch äquivalent mit (∀*x*)¬*A*

Zur Illustration das folgende Beispiel.

1	|	(∀w)¬(∃x)Hxw	Annahme
2	|	¬(∃w)(∃x)Hxw	1 QN
3	|	(∀w)(∀x)¬Hxw	1 QN

12.5 Das System KNSPLI

Das Ableitungssystem von KNSPL kann durch die Addition von Regeln für die Einführung und die Beseitigung des Identitätsprädikats ‚=' erweitert werden. Die symbolische Sprache, die zu verwenden ist, ist PLI.

12.5.1 Identitätseinführung

Die Identitätseinführungsregel erlaubt, in jeder beliebigen Zeile einen Satz der Form $(\forall x)x = x$ abzuleiten. Sätze dieser Form behaupten, dass alles mit sich selbst identisch ist. Da sie immer wahr sind, ist die =E-Regel wahrheitserhaltend.

Identitätseinführung (=E):

>	|	$(\forall x)x = x$

Beispiel:

Ableitungsziel: $(\forall y)y = y$

1	|	$(\forall y)y = y$	=E

12.5.2 Identitätsbeseitigung

Identitätsbeseitigung (=B):

	|	$a = b$			|	$a = b$
	|	A	oder		|	A
>	|	$A(a // b)$		>	|	$A(b // a)$

$A(a // b)$: bedeutet, dass mindestens ein Vorkommnis (aber nicht notwendigerweise alle Vorkommnisse) einer Individuenkonstante b in A durch die Individuenkonstante a ersetzt worden ist.

$A(b // a)$: bedeutet, dass mindestens ein Vorkommnis (aber nicht notwendigerweise alle Vorkommnisse) einer Individuenkonstante a in A durch die Individuenkonstante b ersetzt worden ist.

Die =B-Regel ist wahrheitserhaltend. Sie erlaubt nur dann die Ersetzung einer Individuenkonstante durch eine andere, wenn beide Individuenkonstanten in dem Identitätssatz vorkommen. Die Intuition hinter =B: Was immer von einem Ding wahr ist, ist wahr ganz unabhängig davon, mit welchem Namen man sich auf dieses Ding bezieht.

Beispiel:

1	|	Rab	Annahme
2	|	a = b	Annahme
3	|	Raa	1, 2 =B
4	|	Rba	2, 3 =B

Ableitung von Sätzen der Form *a = a*:

Strategie 1: Ableitungsziel: j = j

1	|	(∀x)x = x	=E
2	|	j = j	1 ∀B

Strategie 2: Ableitungsziel: j = j

1	|	i = j	Annahme
2	|	j = j	1, 1 =B

Die Identitätseinführungsregel und die Identitätsbeseitigung bilden zusammen mit den Regeln von KNSPL ein neues System: KNSPLI.

12.6 Zum Verhältnis von KNSPL+ und KNSPLI

Das Ableitungssystem KNSPL+ ist nicht stärker als KNSPL, insofern alles, was in KNSPL+ ableitbar ist, auch in KNSPL ableitbar ist. KNSPLI – mit seinen beiden Identitätsregeln – ist stärker als KNSPL insofern, nicht alles, was in KNSPLI ableitbar ist in KNSPL ableitbar ist. (Siehe die Ableitung in Abschnitt 12.7.)

12.7 Argumente mit singulären Kennzeichnungen

Die Ableitungssysteme KNSPLI und KNSPLI+ sind für die Demonstration von Ableitbarkeitsbehauptungen einzusetzen, in denen das Identitätsprädikat vorkommt.

Beispiel:

Der römische Feldherr, der Pompeius besiegt hat, hat Gallien erobert.
Julius Caesar war ein römischer Feldherr und er hat Pompeius besiegt.

Julius Caesar hat Gallien erobert.

Symbolisierung in PLI:

Rx:	x ist ein römischer Feldherr
Bxy:	x hat y besiegt
Exy:	x ist in y einmarschiert
j:	Julius Caesar
p:	Pompeius
g:	Gallien

$(\exists x)[((Rx \wedge Bxp) \wedge (\forall y)[(Ry \wedge Byp) \rightarrow y = x]) \wedge Exg]$
$Rj \wedge Bjp$
―――――――――――――――――――――――――
Ejg

Ableitung in KNSPLI:

Ableitungsziel: Ejg

1	|		$(\exists x)[((Rx \wedge Bxp) \wedge (\forall y)[(Ry \wedge Byp) \rightarrow y = x]) \wedge Exg]$	Annahme
2	|		$Rj \wedge Bjp$	Annahme
3	|	|	$((Ra \wedge Bap) \wedge (\forall y)[(Ry \wedge Byp) \rightarrow y = a]) \wedge Eag$	Annahme
4	|	|	$(Ra \wedge Bap) \wedge (\forall y)[(Ry \wedge Byp) \rightarrow y = a]$	3 $\wedge$B
5	|	|	$(\forall y)[(Ry \wedge Byp) \rightarrow y = a]$	4 $\wedge$B
6	|	|	$(Rj \wedge Bjp) \rightarrow j = a$	5 $\forall$B
7	|	|	$j = a$	2, 6 $\rightarrow$B
8	|	|	Eag	3 $\wedge$B
9	|	|	Ejg	7, 8 =B
10	|		Ejg	1, 3-9 $\exists$B

12.8 Logische Eigenschaften und Relationen (KNSPL)

Der Grundbegriff von KNSPL ist wie folgt definiert:

> Definition 12.8.1 (Ableitbarkeit in KNSPL):
>
> Ein Satz *A* von PL ist aus einer Menge Γ von Sätzen von PL **in KNSPL ableitbar** genau dann, wenn es eine Ableitung in KNSPL gibt, in der alle primären Annahmen Elemente von Γ sind und *A* nur im Bereich dieser Annahmen vorkommt.
>
> Formal: $\Gamma \vdash_{KNSPL} A$

Definitionen der logischen Eigenschaften und Relationen:

Definition 12.8.2 (Gültigkeit in KNSPL):

Ein Argument von PL ist **gültig in KNSPL** genau dann, wenn die Konklusion des Arguments in KNSPL aus der Menge, die aus den Prämissen des Arguments besteht ableitbar ist.

Ein Argument von PL ist **ungültig in KNSPL** genau dann, wenn es nicht gültig ist in KNSPL.

Definition 12.8.3 (Theorem von KNSPL):

Ein Satz A von PL ist ein **Theorem** von KNSPL genau dann, wenn A in KNSPL aus der leeren Menge ableitbar ist.

Definition 12.8.4 (Äquivalenz in KNSPL):

Die Sätze A und B von PL sind **in KNSPL äquivalent** genau dann, wenn B in KNSPL aus $\{A\}$ ableitbar ist und A in KNSPL aus $\{B\}$ ableitbar ist.

Definition 12.8.5 (Inkonsistenz in KNSPL):

Eine Menge Γ von Sätzen von PL ist **in KNSPL inkonsistent** genau dann, wenn sowohl ein Satz A von PL als auch seine Negation $\neg A$ in KNSPL aus Γ ableitbar sind.

Eine Menge Γ von Sätzen von PL ist **in KNSPL konsistent** genau dann, wenn sie in KNSPL nicht inkonsistent ist.

In diesen Definitionen darf ‚KNSPL' durch ‚KNSPL+', ‚KNSPLI' und ‚KNSPLI+' ersetzt werden.