# 4. AUSSAGENLOGIK:

# SYNTAX



## 4.1 Objektsprache und Metasprache

Der Unterschied zwischen Objektsprache und Metasprache lässt sich folgendermaßen charakterisieren:

**Objektsprache**: Eine Objektsprache ist eine Sprache, über die gesprochen wird.

**Metasprache**: Eine Metasprache ist eine Sprache, die dazu benutzt wird, um über eine Objektsprache zu sprechen.

In einer deutschsprachigen Grammatik des Griechischen zum Beispiel ist Deutsch die Metasprache und Griechisch die Objektsprache. (In diesem Fall lassen sich Objektsprache und Metasprache aufgrund des unterschiedlichen Alphabets gut unterscheiden.) In einer englischsprachigen Grammatik des Englischen ist die Objektsprache und die Metasprache Englisch. In diesem Teil des Kurses ist die formale Sprache AL die Sprache, die diskutiert wird (d. h. die Objektsprache). Deutsch ist die Sprache, die für die Diskussion von AL verwendet wird (d. h. die Metasprache).

## 4.2 Gebrauch und Erwähnung

Der Unterschied zwischen dem Gebrauch und der Erwähnung eines Ausdrucks lässt sich wie folgt charakterisieren:

**Gebrauch**:

Wenn Ausdrücke verwendet werden, um über etwas anderes als über diese Ausdrücke zu sprechen, werden diese Ausdrücke gebraucht. Beispiel: In dem Satz

‚Usedom ist eine deutsche Halbinsel'

wird der Ausdruck ‚Usedom' gebraucht, um eine Region zu bezeichnen.

**Erwähnung**:

Wenn über Ausdrücke selbst gesprochen wird, werden diese Ausdrücke erwähnt. Beispiel: In dem Satz

> ‚‚Usedom' besteht aus drei Silben'

wird der Ausdruck ‚Usedom' erwähnt. Ein Ausdruck wird erwähnt, indem ein Name dieses Ausdrucks gebildet wird. Der Name eines Ausdrucks wird gebildet, indem der betreffende (alleinstehende) Ausdruck in (einfache) Anführungsstriche gesetzt wird. Die folgenden Sätze sollen dazu dienen, den Unterschied zu verdeutlichen:

- ‚‚Usedom' enthält drei Silben'
- ‚Usedom enthält drei Silben'
- ‚‚Usedom' enthält Fischerboote'
- ‚Usedom enthält Fischerboote'

## 4.3 Metavariablen: Verallgemeinerndes Sprechen über Ausdrücke von AL

Das Setzen von Anführungszeichen um Ausdrücke von AL erlaubt uns, einzelne Ausdrücke zu erwähnen. Namen von Ausdrücken von AL gehören aber nicht zur Sprache AL. Die Erwähnung von Ausdrücken von AL erlaubt uns jedoch nicht, verallgemeinernd über die Ausdrücke von AL zu sprechen. Zu diesem Zweck werden Metavariablen benutzt.

**Metavariable**: Eine Metavariable ist ein Ausdruck der Metasprache, der dazu benutzt wird, allgemein über Ausdrücke der Objektsprache zu reden.

Wir verwenden kursive Großbuchstaben des lateinischen Alphabets ‚*A*', ‚*B*', ‚*C*', um über die Ausdrücke von AL zu sprechen.

Es folgt eine Aussage über einen *bestimmten* Ausdruck von AL:

> Wenn ‚¬(A ∧ B)' ein Ausdruck von AL ist, der aus einem Negationszeichen gefolgt von einem Satz von AL besteht, dann ist ‚¬(A ∧ B)' eine Negation.

Eine *verallgemeinernde* Aussage über Ausdrücke von AL ist zum Beispiel:

> Wenn *A* ein Ausdruck von AL ist, der aus einem Negationszeichen gefolgt von einem Satz von AL besteht, dann ist *A* eine Negation.

Es ist zu beachten, dass dieser Satz nicht über die Metavariable ‚*A*' ist, da ‚*A*' kein Ausdruck von AL ist. Es ist ein Satz über alle *Werte* von *A*, d. h. über alle Ausdrücke, die für ‚*A*' eingesetzt werden können und Ausdrücke von AL sind.

## 4.4 Die Sprache der Aussagenlogik

AL ist die (formale) Sprache der Aussagenlogik. Eine formale Sprache wird durch die Angabe des Vokabulars (oder auch Alphabets) und der Grammatik dieser Sprache spezifiziert. Das Vokabular listet die Grundausdrücke der formalen Sprache auf. Die Grammatik definiert durch die Angabe von Bildungsregeln, welche syntaktischen Kombinationen aus diesen Grundausdrücken als wohlgeformte Formeln (im Falle von AL: als Sätze) der betreffenden formalen Sprache angesehen werden dürfen.

### 4.4.1 Das Vokabular von AL

Das Vokabular von AL spezifiziert die Grundausdrücke von AL. Es sind: Satzbuchstaben, die wahrheitsfunktionalen Konnektive und Klammern.

**Satzbuchstaben**:

Großbuchstaben des lateinischen Alphabets, mit oder ohne Indices:

$A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots, A_2, B_2, C_2, \ldots$

Die Indices sind Ziffern für positive ganze Zahlen. Sie sind unten rechts anzubringen. Die Menge $\boldsymbol{S}$ ist die Menge der Satzbuchstaben von AL: $\boldsymbol{S} = \{A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots, A_2, B_2, C_2, \ldots\}$. (Da die Indices für positive ganze Zahlen stehen, enthält $\boldsymbol{S}$ abzählbar unendlich viele Elemente.)

**Konnektive**:

Wahrheitsfunktionale Konnektive:

| | | |
|---|---|---|
| einstellig: | $\neg$ | (Negationssymbol) |
| zweistellig: | $\wedge$ | (Konjunktionssymbol) |
| | $\vee$ | (Disjunktionssymbol) |
| | $\rightarrow$ | (Konditionalsymbol) |
| | $\leftrightarrow$ | (Bikonditionalsymbol) |

**Klammern**:

| | |
|---|---|
| aufgehende Klammer (rund): | ( |
| zugehende Klammer (rund): | ) |
| aufgehende Klammer (eckig): | [ |
| zugehende Klammer (eckig): | ] |

**Die übrigen Ausdrücke von AL**:

Die übrigen Ausdrücke von AL werden gebildet, indem ein Grundausdruck auf den anderen folgend geschrieben wird. Nicht alle Ausdrücke von AL sind für uns interessant. Es kommt uns nur auf Sätze von AL an. (Nicht alle Ausdrücke von AL sind also Sätze von AL.) Was als Satz von AL gilt, bestimmt die Grammatik von AL.

### 4.4.2 Die Grammatik von AL

Wir legen die Grammatik von AL fest, indem wir festlegen, welche Ausdrücke von AL als Sätze von AL zählen.

Definition 4.4.2 (Satz von AL):

1. Jeder Satzbuchstabe ist ein Satz.
2. Wenn $A$ ein Satz ist, dann ist $\neg A$ ein Satz.
3. Wenn $A$ und $B$ Sätze sind, dann ist $(A \wedge B)$ ein Satz.
4. Wenn $A$ und $B$ Sätze sind, dann ist $(A \vee B)$ ein Satz.
5. Wenn $A$ und $B$ Sätze sind, dann ist $(A \rightarrow B)$ ein Satz.
6. Wenn $A$ und $B$ Sätze sind, dann ist $(A \leftrightarrow B)$ ein Satz.
7. Sonst gilt nichts als ein Satz, es sei denn er kann durch wiederholte Anwendung der Klauseln 1 bis 6 gebildet werden.

***F***(***S***) ist die Menge aller Sätze von AL.

### 4.4.3 Testverfahren: Satz von AL

Man kann effektiv zeigen, ob ein Ausdruck von AL ein Satz von AL ist oder nicht, indem man mit den Satzbuchstaben beginnt, die in dem Ausdruck vorkommen und die Klauseln (1)-(7) der obigen Definition benutzt, bis der fragliche Ausdruck erzeugt ist. Kann der fragliche Ausdruck mit Hilfe dieser Definition nicht erzeugt werden, dann ist er kein Satz von AL.

Beispiel 1: $(\neg \mathrm{A} \wedge (\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B}))$

- Nach Klausel 1, sind ‚A' und ‚B' Sätze.
- Nach Klausel 2 ist ‚$\neg$A' ein Satz.
- Nach Klausel 4 ist ‚$(\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B})$' ein Satz.
- Nach Klausel 3 ist ‚$(\neg \mathrm{A} \wedge (\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B}))$' ein Satz.

Beispiele 2:

$(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C})$
$\neg\leftrightarrow \mathrm{D}$
$(\mathrm{EF} \rightarrow \mathrm{G})$
$(\mathrm{p} \vee \mathrm{q})$
$((\mathrm{H} \leftrightarrow \mathrm{I}) \wedge (\mathrm{J} \rightarrow \mathrm{K})))$
(L & M)
$\mathrm{N}^3 \wedge \mathrm{O}^{77}$

- Allesamt keine Sätze von AL.

### 4.4.4 Konventionen zur Klammerersparnis

Die *äußersten* Klammern können weggelassen werden, wann immer der Satz für sich selbst steht (d. h. wenn er nicht Teil eines anderen Satzes ist).

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zulässig: | ‚$A \lor (B \land C)$’ | statt | ‚$(A \lor (B \land C))$’ |
| Unzulässig: | ‚$\neg D \leftrightarrow E$’ | statt | ‚$\neg(D \leftrightarrow E)$’ |

Die äußersten Klammern metasprachlicher Ausdrücke können ausgelassen werden:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zulässig: | ‚$\mathit{A} \leftrightarrow \mathit{B}$’ | statt | ‚$(\mathit{A} \leftrightarrow \mathit{B})$’ |
| Unzulässig: | ‚$\neg \mathit{A} \lor \mathit{B}$’ | statt | ‚$\neg(\mathit{A} \lor \mathit{B})$’ |

Sowohl in Sätzen von AL als auch in metasprachlichen Ausdrücken können eckige Klammern statt runder Klammern benutzt werden. So mag man

‚$\neg([(A \to B) \land \neg (C \lor D)] \leftrightarrow E)$’

übersichtlicher finden als

‚$\neg(((A \to B) \land \neg (C \lor D)) \leftrightarrow E)$’.

Von weiteren Konventionen zur Klammerersparnis sehen wir ab.

## 4.5 Terminologie der Syntax von AL

Bei der Diskussion der Syntax von Sätzen von AL werden abgesehen von den bisher eingeführten syntaktischen Begriffen (z. B. atomarer/molekularer Satz, Satzbuchstabe, Konnektiv-Symbole, Klammern) die folgenden Begriffe zugrunde gelegt: Hauptkonnektiv, unmittelbare Satzkomponenten, Satzkomponenten und atomare Komponenten eines Satzes von AL.

### 4.5.1 Hauptkonnektiv und unmittelbare Satzkomponente

Diese Ausdrücke lassen sich wie folgt kontextuell definieren:

1. Wenn *A* ein atomarer Satz ist, enthält *A* keine Konnektive und hat somit kein Hauptkonnektiv.

2. Wenn *A* ein atomarer Satz ist, dann hat *A* keine unmittelbaren Satzkomponenten (und *vice versa*).

3. Wenn *A* die Form $\neg \mathit{B}$ hat, wobei *B* ein Satz ist, dann ist das Hauptkonnektiv von *A* das Negationszeichen, das vor *B* steht und *B* ist die unmittelbare Satzkomponente von *A*.

4. Wenn $A$ die Form $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \rightarrow C$, oder $B \leftrightarrow C$ hat, wobei $B$ und $C$ Sätze sind, dann ist das Hauptkonnektiv von $A$ das Konnektiv, das zwischen $B$ und $C$ vorkommt, und $B$ und $C$ sind die unmittelbaren Satzkomponenten von $A$.

### 4.5.2 Satzkomponenten

Die Satzkomponenten eines Satzes sind:

- der Satz selbst
- seine unmittelbaren Satzkomponenten
- die Satzkomponenten seiner unmittelbaren Satzkomponenten.

### 4.5.3 Atomare Komponenten

Die atomaren Komponenten eines Satzes sind die Satzkomponenten, die atomare Sätze sind.

### 4.5.4 Der „Stammbaum" eines Satzes von AL

Im folgenden soll das freistehende Zeichen ‚|' als ‚hat als unmittelbare Satzkomponente' gelesen werden.

$$
\begin{array}{l}
[(A \rightarrow B) \wedge \neg (C \vee D)] \leftrightarrow E \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad | \\
[(A \rightarrow B) \wedge \neg (C \vee D)] \leftrightarrow E \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad | \\
[(A \rightarrow B) \wedge \neg (C \vee D)] \qquad\qquad E \\
\qquad\qquad | \\
A \rightarrow B \qquad \neg (C \vee D) \\
\quad | \qquad\qquad\quad | \\
A \qquad B \qquad C \vee D \\
\qquad\qquad\qquad\quad | \\
\qquad\qquad\qquad C \qquad D
\end{array}
$$