5. AUSSAGENLOGIK:

SEMANTIK

5.1 Charakteristische Wahrheitstafeln

Wahrheitstafeln legen fest, wie der Wahrheitswert eines wahrheitsfunktional zusammengesetzten Satzes zu bestimmen ist, wenn die Wahrheitswerte seiner unmittelbaren Satzkomponenten gegeben sind. Die Wahrheitstafeln für die fünf Konnektive von AL sind uns mittlerweile bekannt.

Negation:

A	$\neg A$
w	**f**
f	**w**

Konjunktion:

A	B	$A \wedge B$
w	**w**	**w**
w	**f**	**f**
f	**w**	**f**
f	**f**	**f**

Disjunktion:

A	B	$A \vee B$
w	**w**	**w**
w	**f**	**w**
f	**w**	**w**
f	**f**	**f**

materiales Konditional:

A	B	$A \rightarrow B$
w	**w**	**w**
w	**f**	**f**
f	**w**	**w**
f	**f**	**w**

materiales Bikonditional:

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	**w**	**w**
w	**f**	**f**
f	**w**	**f**
f	**f**	**w**

Wir wollen diese Wahrheitstafeln von nun an ‚charakteristische Wahrheitstafeln' nennen, da sie die Bedeutung der einzelnen Konnektive angeben. Wir heben sie durch diese Bennenung von den Wahrheitstafeln ab, die wir in späteren Abschnitten konstruieren werden, um z.B. einzelne Sätze von AL auf ihre logischen Eigenschaften zu untersuchen.

5.2 Wahrheitswertzuordnung I

Die Wahrheitswerte atomarer Sätze werden durch Wahrheitswertzuordnungen fixiert:

> Eine **Wahrheitswertzuordnung I** ist eine Funktion, die jedem atomaren (!) Satz von AL einen der beiden Wahrheitswerte **w** oder **f** zuordnet.

Etwas formaler:

$$\mathbf{I} : \boldsymbol{S} \rightarrow \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$$

Alternative Terminologie: Interpretation, Bewertung. Einige Bemerkungen:

1. Der Begriff der Wahrheitswertzuordnung ist der *semantische Grundbegriff* von der Aussagenlogik. Mit Hilfe dieses Begriffs werden solche Begriffe wie z.B. wahrheitsfunktionale Wahrheit oder wahrheitsfunktionale Folgerung definiert. (Vgl. dazu die betreffenden Definitionen weiter unten.)

2. Eine Wahrheitswertzuordnung ordnet *jedem* atomaren Satz von AL einen Wahrheitswert zu. (Eine Wahrheitswertzuordnung erzeugt sozusagen eine vollständige und konsistente Zustandsbeschreibung einer (möglichen) Welt.)

3. Die atomaren Sätze von AL sind voneinander wahrheitsfunktional *unabhängig*, d. h. der Wahrheitswert, der einem atomaren Satz zugeordnet ist, beeinflusst die Wahrheitswerte, die anderen atomaren Sätzen zugeordnet worden sind, nicht.

4. Die Wahrheitswerte wahrheitsfunktional zusammengesetzter Sätze von AL werden gänzlich durch die Wahrheitswerte bestimmt, die ihren atomaren Komponenten durch **I** zugewiesen worden sind (*Wahrheitsfunktionalität*).

5. Aus den Bemerkungen 2 und 4 folgt, dass jeder wahrheitsfunktional *zusammengesetzte Satz* von AL unter jeder Wahrheitswertzuordnung ebenfalls einen Wahrheitswert hat.

5.3 Die Konstruktion von Wahrheitstafeln

Das folgende Konstruktionsverfahren erlaubt, Wahrheitstafeln so zu konstruieren, dass alle Kombinationen von Wahrheitswerten von der Tafel erfasst werden. Damit wird eine lückenlose Auswertung von Sätzen von AL gewährleistet. (Nur eine solche ist brauchbar, wie die wahrheitsfunktionalen Definitionen der logischen Eigenschaften und Relationen noch zeigen werden.)

Schritt 1: Bestimmung der *Anzahl n* der verschiedenen Satzbuchstaben (d.h. der atomaren Sätze), die in *A* vorkommen. Wenn *A* eine Anzahl von *n* atomaren Komponenten hat, dann gibt es 2^n unterschiedliche *Kombinationen* von Wahrheitswerten für die atomaren Komponenten von *A*. Diese Kombinationen (bzw. Fragmente von Wahrheitswertzuordnungen) werden durch die Zeilen der Wahrheitstafel repräsentiert, die unter den Spalten für die Bewertung der Satzbuchstaben stehen.

Schritt 2: *Alphabetische Auflistung* der verschiedenen atomaren Komponenten von *A* links neben *A*.

Schritt 3: Beim *Eintragen* der Wahrheitswerte in die Spalten, die sich unterhalb der atomaren Komponenten befinden, befolgt man am besten die folgende simple Regel, die auf sicherem Wege zur Auflistung aller möglichen Wahrheitswertzuordnungen an die Atome von *A* führt:

Die erste Spalte für eine Wahrheitstafel mit *n* Satzbuchstaben besteht aus 2^{n-1} **w**s, die sich mit 2^{n-1} **f**s abwechseln; die zweite aus 2^{n-2} **w**s, die sich mit 2^{n-2} **f**s abwechseln. Wenn also *n* die Anzahl der Satzbuchstaben von *A* ist und *i* die Zahl, die von der Nummer der Spalte (von links nach rechts gezählt) bezeichnet wird, dann besteht die *i*te Spalte aus 2^{n-i} **w**s, die sich mit 2^{n-i} **f**s abwechseln, wobei $2^0 = 1$.

Beispiel:

A	B	C	$(\neg \; B \; \wedge \; C) \; \rightarrow \; (A \; \leftrightarrow \; B)$
w	**w**	**W**	
w	**w**	**f**	
w	**f**	**w**	
w	**f**	**f**	
f	**w**	**w**	
f	**w**	**f**	
f	**f**	**w**	
f	**f**	**f**	

Schritt 4: *Kopieren* der Spalten für die atomaren Komponenten von *A* unter ihre Vorkommnisse in der Spalte für *A*.

A	B	C	(¬	B	∧	C)	→	(A	↔	B)
w	**w**	**w**		**w**		**w**		**w**		**w**
w	**w**	**f**		**w**		**f**		**w**		**w**
w	**f**	**w**		**f**		**w**		**w**		**f**
w	**f**	**f**		**f**		**f**		**w**		**f**
f	**w**	**w**		**w**		**w**		**f**		**w**
f	**w**	**f**		**w**		**f**		**f**		**w**
f	**f**	**w**		**f**		**w**		**f**		**f**
f	**f**	**f**		**f**		**f**		**f**		**f**

Schritt 5: *Berechnung* des Wahrheitswerts von *A* mit Hilfe der charakteristischen Wahrheitstafeln für die wahrheitsfunktionalen Konnektive von AL.

Die Berechnung fängt mit den wahrheitsfunktional zusammengesetzten Sätzen der geringsten Komplexität an (d. h. mit den atomaren Komponenten) und endet mit dem wahrheitsfunktional zusammengesetzten Satz mit der größten Komplexität (d. h. mit *A* selbst). Letzterer ist bekanntlich mit Hilfe des Hauptkonnektivs zusammengesetzt.

A	B	C	(¬	B	∧	C)	→	(A	↔	B)
w	**w**	**w**		**w**		**w**		**w**		**w**
w	**w**	**f**		**w**		**f**		**w**		**w**
w	**f**	**w**		**f**		**w**		**w**		**f**
w	**f**	**f**		**f**		**f**		**w**		**f**
f	**w**	**w**		**w**		**w**		**f**		**w**
f	**w**	**f**		**w**		**f**		**f**		**w**
f	**f**	**w**		**f**		**w**		**f**		**f**
f	**f**	**f**		**f**		**f**		**f**		**f**

(Die Vervollständigung der Tafel sei Ihnen überlassen.)

5.4 Wahrheit und Falschheit unter einer Wahrheitswertzuordnung

Definition 5.4.1 (Wahrheit unter einer Wahrheitswertzuordnung):

Ein Satz ist **wahr unter einer Wahrheitswertzuordnung I** genau dann, wenn er den Wahrheitswert **w** unter dieser Wahrheitswertzuordnung hat.

Formaler: Ein Satz *A* ist wahr unter **I** genau dann, wenn **I**(*A*) = **w**.

Definition 5.4.2 (Falschheit unter einer Wahrheitswertzuordnung):

Ein Satz ist **falsch unter einer Wahrheitswertzuordnung I** genau dann, wenn er den Wahrheitswert **f** unter dieser Wahrheitswertzuordnung hat.

Formaler: Ein Satz *A* ist falsch unter **I** genau dann, wenn **I**(*A*) = **f**.

5.5 Wahrheitsbedingungen der Sätze von AL

Wenn **I** eine Wahrheitswertzuordnung ist, dann sind die Wahrheitsbedingungen für die wahrheitsfunktional zusammengesetzten Elemente von ***F***(***S***) wie folgt definiert:

1. $\mathbf{I}(\neg A) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$

2. $\mathbf{I}(A \wedge B) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$

3. $\mathbf{I}(A \vee B) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ oder $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$

4. $\mathbf{I}(A \rightarrow B) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ oder $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$

5. $\mathbf{I}(A \leftrightarrow B) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$
   oder
   $\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$

Die Abkürzung ‚gdw' ist zu lesen als ‚genau dann, wenn'. (Worin besteht der Unterschied zwischen ‚gdw' und ‚$\leftrightarrow$'?)

Die Abschnitte 5.4 und 5.5 geben die Semantik für die Sprache AL an. Wir kommen nun zum Wahrheitstafelverfahren, das auf dieser Semantik aufbaut.

5.6 Wahrheitsfunktionale Wahrheit und das Wahrheitstafelverfahren

Informale Definition der logischen Wahrheit mit Hilfe des etwas vagen Begriffs der Möglichkeit.

Definition 1.9.1 (logische Wahrheit):

Ein Satz ist **logisch wahr** genau dann, wenn es nicht möglich ist, dass der Satz falsch ist.

Es folgt eine präzisere Definition des Begriffs der logischen Wahrheit im Sinne der wahrheitsfunktionalen Wahrheit mit Hilfe des präzisen Begriffs der Wahrheitswertzuordnung.

Definition 5.6 (wahrheitsfunktionale Wahrheit):

Ein Satz *A* von AL ist **wahrheitsfunktional wahr** genau dann, wenn *A* unter jeder Wahrheitswertzuordnung wahr ist.

Alternative Terminologie: allgemeingültiger Satz, Tautologie.

Ermittlung wahrheitsfunktionaler Wahrheiten mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens:

Satz: ‚Wenn es in ***T***übingen schneit, dann schneit es in ***T***übingen'

Symb.: $T \rightarrow T$

Wahrheitstafelverfahren:

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstafel für ‚$T \rightarrow T$'

T	T → T
w **f**	

Schritt 2: Überprüfung, ob die Spalte unter dem Hauptkonnektiv ausschließlich **w**s enthält. Falls ja, dann ist der betreffende Satz eine wahrheitsfunktionale Wahrheit; andernfalls nicht.

5.7 Wahrheitsfunktionale Falschheit und das Wahrheitstafelverfahren

Vage:

Definition 1.9.2. (logische Falschheit):

Ein Satz ist **logisch falsch** genau dann, wenn es nicht möglich ist, dass der Satz wahr ist.

Präzise:

> Definition 5.7 (wahrheitsfunktionale Falschheit):
>
> Ein Satz *A* von AL ist **wahrheitsfunktional falsch** genau dann, wenn *A* unter jeder Wahrheitswertzuordnung falsch ist.

Alternative Terminologie: widersprüchlicher Satz, kontradiktorischer Satz, Selbstwiderspruch.

Ermittlung wahrheitsfunktionaler Falschheiten mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens:

Satz: ‚Es ist nicht der Fall, dass es in ***T***übingen schneit, wenn es in ***T***übingen schneit'

Symb.: $\neg(T \rightarrow T)$

Wahrheitstafelverfahren:

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstafel für ‚$\neg(T \rightarrow T)$'

T	$\neg$	(T	$\rightarrow$	T)
w				
f				

Schritt 2: Überprüfung, ob die Spalte unter dem Hauptkonnektiv ausschließlich **f**s enthält. Falls ja, dann ist der betreffende Satz eine wahrheitsfunktionale Falschheit; andernfalls nicht.

Beispiel:

I	J	[(I	$\vee$	J)	$\rightarrow$	$\neg$	(I	$\vee$	J)]	$\wedge$	I
w	**w**	**w**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**
w	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**
f	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**

5.8 Wahrheitsfunktionale Indeterminiertheit und das Wahrheitstafelverfahren

Vage:

> Definition 1.9.3 (logische Inteterminiertheit):
>
> Ein Satz ist **logisch indeterminiert** genau dann, wenn er weder logisch wahr noch logisch falsch ist.

Präzise:

> Definition 5.8 (wahrheitsfunktionale Indeterminiertheit):
>
> Ein Satz *A* von AL ist **wahrheitsfunktional indeterminiert** genau dann, wenn *A* weder wahrheitsfunktional wahr noch wahrheitsfunktional falsch ist.

Alternative Terminologie: kontingenter Satz. Aus dieser Definition folgt, dass ein wahrheitsfunktional indeterminierter Satz unter mindestens einer Wahrheitswertzuordnung wahr ist und unter mindestens einer Wahrheitswertzuordnung falsch.

Ermittlung wahrheitsfunktional indeterminierter Sätze mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens:

Satz: ‚Es schneit in Tübingen'

Symb.: T

Wahrheitstafelverfahren:

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstafel für ‚T'.

T	T
w **f**	

Schritt 2: Überprüfung, ob die Spalte unter dem Hauptkonnektiv (falls es eins gibt, ansonsten unter dem Atom) mindestens ein **w** und mindestens ein **f** enthält. Falls ja, dann ist der betreffende Satz eine wahrheitsfunktional indeterminierte Aussage; andernfalls nicht.

5.9 Wahrheitsfunktionale Äquivalenz und das Wahrheitstafelverfahren

Vage:

Definition 1.10 (logische Äquivalenz):

Die Elemente eines Satzpaares sind **logisch äquivalent** genau dann, wenn es nicht möglich ist, dass einer der Sätze wahr und der andere falsch ist.

Präzise:

Definition 5.9 (wahrheitsfunktionale Äquivalenz):

Sätze *A* und *B* von AL sind **wahrheitsfunktional äquivalent** genau dann, wenn es keine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der *A* und *B* verschiedene Wahrheitswerte haben.

Ermittlung der wahrheitsfunktionalen Äquivalenz eines Satzpaares mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens:

Wie zu erwarten ist, ist im ersten Schritt 1 eine (einzige) Wahrheitstafel für *A* und *B* zu erstellen. Im zweiten Schritt wird überprüft, ob die Spalten unter den Hauptkonnektiven von *A* und *B* denselben Wahrheitswert haben. Falls ja, dann sind *A* und *B* wahrheitsfunktional äquivalent; andernfalls nicht. Beispiele:

a) Ein wahrheitsfunktional äquivalentes Satzpaar (überzeugen Sie sich davon)

M	M $\wedge$ M	M $\vee$ M
w	**w** **w**	**w** **w**
f	**f** **f**	**f** **f**

b) Ein wahrheitsfunktional nicht äquivalentes Satzpaar

N	O	P	N $\vee$ O	(O $\vee$ P) $\vee$ N	
w	**w**	**w**	**w w w**	**w w w w w**	
w	**w**	**f**	**w w w**	**w w f w w**	
w	**f**	**w**	**w w f**	**f w w w w**	
w	**f**	**f**	**w w f**	**f f f w w**	
f	**w**	**w**	**f w w**	**w w w w f**	
f	**w**	**f**	**f w w**	**w w f w f**	
f	**f**	**w**	**f f f**	**f w w w f**	<
f	**f**	**f**	**f f f**	**f f f f f**	

5.10 Wahrheitsfunktionale Konsistenz und das Wahrheitstafelverfahren

Vage:

Definition 1.8 (logische Konsistenz):

Eine Menge von Sätzen ist **logisch konsistent** genau dann, wenn es möglich ist, dass alle Elemente dieser Menge wahr sind.

Eine Menge von Sätzen ist **logisch inkonsistent** genau dann, wenn sie nicht logisch konsistent ist.

Präzise:

Definition 5.10 (wahrheitsfunktionale Konsistenz):

Eine Menge Γ von Sätzen von AL ist **wahrheitsfunktional konsistent** genau dann, wenn es mindestens eine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der alle Elemente von Γ wahr sind.

Eine Menge Γ von Sätzen von AL ist **wahrheitsfunktional inkonsistent** genau dann, wenn sie nicht wahrheitsfunktional konsistent ist.

Konsistenz ist also eine Eigenschaft von Mengen. Wir schreiben

$\{A, B \wedge C\}$

statt

{‚A', ‚B ∧ C'}.

Ermittlung der wahrheitsfunktionalen Konsistenz einer Menge mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens:

Schritt 1: Erstellung einer einzigen Wahrheitstafel für alle Elemente von Γ.

Schritt 2: Überprüfung, ob es mindestens eine Zeile in der Wahrheitstafel gibt, die in den Spalten, die sich unter den Hauptkonnektiven der Elemente von Γ befinden, den Wahrheitswert **w** aufweist. (Falls es kein Konnektiv gibt, ist der Wahrheitswert der atomaren Komponente zu nehmen.) Falls ja, dann ist die Menge Γ wahrheitsfunktional konsistent; andernfalls nicht.

Beispiele:

a) konsistente Menge: {S, T, T → U}

S	T	U	S	T	→	U	T	
w	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	<
w	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	
w	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**	
w	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	
f	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**	
f	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	
f	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	

b) inkonsistente Menge: {W, W → V, ¬V}

V	W	W	W	→	V	¬	V
w	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**
w	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**
f	**w**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**
f	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**

5.11 Wahrheitsfunktionale Folgerung und das Wahrheitstafelverfahren

Definition 5.11.1 (wahrheitsfunktionale Folgerung):

Satz *A* **folgt wahrheitsfunktional** aus einer Menge Γ von Sätzen von AL (formal: Γ |= *A*) genau dann, wenn es keine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der jedes Element von Γ wahr ist und *A* falsch ist.

Wenn *A* nicht wahrheitsfunktional aus Γ folgt, schreiben wir Γ |≠ *A*. (Alle und nur die wahrheitsfunktional wahren Sätze von AL folgen wahrheitsfunktional aus der leeren Menge.)

Ermittlung einer wahrheitsfunktionalen Folgerungsbeziehung mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens:

Wenn Γ eine endliche Menge ist, kann bestimmt werden, ob *A* aus Γ wahrheitsfunktional folgt, indem eine Wahrheitstafel für die Elemente von Γ und für *A* konstruiert wird. Wenn es eine Zeile in der Wahrheitstafel gibt, in welcher alle Elemente von Γ den Wahrheitswert **w** haben und *A* den Wahrheitswert **f** hat, dann ist es nicht der Fall, dass *A* wahrheitsfunktional aus Γ folgt. Wenn es keine solche Zeile gibt, dann folgt *A* wahrheitsfunktional aus Γ.

Beispiel 1: $\{A, B \wedge C\} \mid= B$

A	B	C	A	B	$\wedge$	C	B
w	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**
w	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**
w	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**
w	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**
f	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**
f	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**
f	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**

Beispiel 2: $\{E \vee D,\ \neg(E \vee D)\}\ \mid=\ E$

D	E	E	$\vee$	D	$\neg$	(E	$\vee$	D)	E
w	**w**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**
w	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**
f	**w**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**

Beispiel 3: $\{F, G \vee H\}\ \mid\neq\ G$

F	G	H	F	G	$\vee$	H	G	
w	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	
w	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**	
w	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**	<
w	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**	
f	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**	
f	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**	
f	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	

Wir sind nun in der Lage, den vagen Begriff der deduktiven Gültigkeit aus Kapitel 1 präzise zu definieren.

Definition 1.5 (deduktive Gültigkeit):

Ein Argument ist **deduktiv gültig** genau dann, wenn es nicht möglich ist, dass die Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist.

Ein Argument ist deduktiv ungültig genau dann, wenn es nicht deduktiv gültig ist.

Definition 5.11.2 (wahrheitsfunktionale Gültigkeit):

Ein Argument von AL ist **wahrheitsfunktional gültig** genau dann, wenn es keine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der alle Prämissen Γ wahr sind und die Konklusion *A* falsch ist.

Ein Argument von AL ist **wahrheitsfunktional ungültig** genau dann, wenn es nicht wahrheitsfunktional gültig ist.

Somit ist ein Argument wahrheitsfunktional gültig genau dann, wenn die Konklusion aus der Menge, die aus den Prämissen des Arguments besteht, wahrheitsfunktional folgt.

Ermittlung der wahrheitsfunktionalen Gültigkeit von Argumenten mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens:

Das Verfahren beläuft sich auf einen Test auf wahrheitsfunktionale Folgerung.

Beispiel 1:

$(I \wedge K) \vee (J \rightarrow K)$
$\neg K \vee J$
____
$\neg J \vee K$
wfg

I	J	K	(I	∧	K)	∨	(J	→	K)	¬	K	∨	J	¬	J	∨	K
w	w	w	w	w	w	$\underline{w}$	w	w	w	f	w	$\underline{w}$	w	f	w	$\underline{w}$	w
w	w	f	w	f	f	f	w	f	f	w	f	w	w	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w	w	f	w	w	f	w	f	f	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f	$\underline{w}$	f	w	f	w	f	$\underline{w}$	f	w	f	$\underline{w}$	f
f	w	w	f	f	w	$\underline{w}$	w	w	w	f	w	$\underline{w}$	w	f	w	$\underline{w}$	w
f	w	f	f	f	f	f	w	f	f	w	f	w	w	f	w	f	f
f	f	w	f	f	w	w	f	w	w	f	w	f	f	w	f	w	w
f	f	f	f	f	f	$\underline{w}$	f	w	f	w	f	$\underline{w}$	f	w	f	$\underline{w}$	w

Beispiel 2:

$L \leftrightarrow (\neg N \vee M)$
$M \leftrightarrow \neg L$
____
$\neg L$
wfug

L	M	N	L	$\leftrightarrow$	($\neg$	N	$\vee$	M)	M	$\leftrightarrow$	$\neg$	L	$\neg$	L	
w	**w**	**W**	**W**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	
w	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	
w	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**	
w	**f**	**f**	**w**	$\underline{\mathbf{w}}$	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	$\underline{\mathbf{w}}$	**f**	**w**	$\underline{\mathbf{f}}$	**w**	<
f	**w**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**	**f**	
f	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**	**f**	
f	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	

5.11.1 Wahrheitsfunktionale Folgerung und das korrespondierende materiale Konditional

Wenn Γ endlich viele Sätze von AL enthält, dann kann für jede Folgerungsbeziehung $\Gamma \models A$ (und somit für jedes Argument von AL, das eine endliche Anzahl von Prämissen hat) ein **korrespondierendes materiales Konditional** gebildet werden.

Satz 5.11.1 (Die wahrheitsf. Gültigkeit eines Arguments und die wahrheitsf. Wahrheit seines korrespondierenden materialen Kondonditionals):

Das korrespondierende materiale Konditional eines Arguments von AL ist wahrheitsfunktional wahr genau dann, wenn das Argument wahrheitsfunktional gültig ist.
Es gilt somit:

$\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\} \models B$ gdw $(((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ ist wahrheitsf. wahr

Bildung eines korrespondierenden materialen Konditionals:

Schritt 1: Bildung einer **iterierten Konjunktion** $(((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \ldots \wedge A_n)$ aus den Sätzen A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$. Beispiel:

Sätze: ‚$\neg$(N $\leftrightarrow$ O)', ‚O $\leftrightarrow$ P', ‚$\neg$N'
iterierte Konjunktion: ‚(($\neg$(N $\leftrightarrow$ O) $\wedge$ (O $\leftrightarrow$ P)) $\wedge$ $\neg$N)'

Schritt 2: Bildung des korrespondierenden materialen Konditionals, indem ein materiales Konditional mit der iterierten Konjunktion der Prämissen als Vordersatz und der Konklusion des Arguments als Hintersatz geformt wird. Ein Beispiel:

Argument (in Standardform):

$\neg(N \leftrightarrow O)$
$O \leftrightarrow P$
$\neg N$
____
$\neg P$

Folgerungsbehauptung:

$\{\neg(N \leftrightarrow O), O \leftrightarrow P, \neg N\} \models \neg P$

Korrespondierendes materiales Konditional:

‚$((\neg(N \leftrightarrow O) \wedge (O \leftrightarrow P)) \wedge \neg N) \rightarrow \neg P$'

Da die Prämissen eines Arguments in mehr als einer Weise eingeklammert werden können, gibt es strenggenommen mehr als nur ein korrespondierendes materiales Konditional! Sie sind aber alle wahrheitsfunktional äquivalent.

Ermittlung der wahrheitsf. Gültigkeit von Argumenten mit Hilfe korrespondierender materialer Konditionale und des Wahrheitstafelverfahrens:

Beispiel 1:

T
$T \rightarrow U$
____
U
wfg

T	U	(T	∧	(T	→	U))	→	U
w	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**
w	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**
f	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**

Beispiel 2:

$\neg(N \leftrightarrow O)$
$O \leftrightarrow P$
$\neg N$
____
$\neg P$
wfug

N	O	P	((¬	(N	↔	O)	∧	(O	↔	P))	∧	¬	N)	→	¬	P
w	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**
w	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**
w	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**
w	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**
f	**w**	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**
f	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**
f	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**

Beweis von Satz 5.11.1.

(→)
Annahme: $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\} \models B$.
Dann gibt es (nach Definition 5.11) keine Wahrheitswertzuordnung **I**, unter der alle Elemente von $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ wahr sind und B falsch ist.
Nun hat (nach Definition 5.5.4) ein materiales Konditional unter keiner Wahrheitswertzuordnung **I** den Wahrheitswert **w**, unter der der Vordersatz wahr und der Hintersatz falsch ist.
Da das für alle Konditionale gilt, gilt es auch für $(((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$.
Dann gibt es (der Annahme entsprechend) keine **I**, unter der der Vordersatz $(((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \ldots \wedge A_n)$ wahr wird und der Hintersatz B falsch wird.
Somit ist (nach Definition 5.6) $(((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ wahrheitsfunktional wahr.

(←)
Man braucht nur den Beweis von (→) „von unten nach oben“ zu lesen, wobei man die Konklusion dieses Beweises als Annahme annimmt und die Annahme dieses Beweises als Konklusion gewinnt. (Siehe z.B. den Beweis von Satz 5.13.1 unten.)

□

5.11.2 Wahrheitsfunktionale Äquivalenz und das korrespondierende materiale Bikonditional

Wenn A und B Sätze von AL sind, dann ist $A \leftrightarrow B$ das **korrespondierende materiale Bikonditional** dieses Satzpaares.

Satz 5.11.2 (wahrheitsf. Äquivalenz und die wahrheitsf. Wahrheit eines korrespondierenden materialen Bikondonditionals):

Sätze A und B sind wahrheitsfunktional äquivalent genau dann, wenn das korrespondierende materiale Bikonditional dieses Satzpaares $A \leftrightarrow B$ wahrheitsfunktional wahr ist.

Beweis von Satz 5.11.2.

(→)
Annahme: A und B sind wahrheitsfunktional äquivalent.
Wenn A und B wahrheitsfunktional äquivalent sind, dann haben (nach Definition 5.9) A und B unter jeder Wahrheitswertzuordnung denselben Wahrheitswert.
Nun hat (nach Definition 5.5.5) ein materiales Bikonditional $A \leftrightarrow B$ unter jeder Wahrheitswertzuordnung den Wahrheitswert **w**, unter der seine unmittelbaren Satzkomponenten A und B denselben Wahrheitswert haben.
Somit ist (der Annahme entsprechend) $A \leftrightarrow B$ unter jeder Wahrheitswertzuordnung wahr und deshalb (nach Definition 5.6) wahrheitsfunktional wahr.

(←)
„Von unten nach oben".

□

5.12 Zur Entscheidbarkeit

Mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens kann für jeden Satz von AL in endlich vielen Schritten mechanisch festgestellt werden, ob dieser Satz wahrheitsfunktional wahr ist oder nicht. Die Existenz eines solchen Verfahrens garantiert den folgenden Satz:

Satz 5.12 (Entscheidbarkeit und Wahrheitstafelverfahren):

Die wahrheitsfunktionale Wahrheit eines Satzes von AL ist **entscheidbar**.

Mutatis mutandis für die übrigen logischen Eigenschaften und Beziehungen.

5.13 Reduktion auf wahrheitsfunktionale Konsistenz

Die Begriffe der

- wahrheitsfunktionalen Wahrheit,
- wahrheitsfunktionalen Falschheit,
- wahrheitsfunktionalen Indeterminiertheit,
- wahrheitsfunktionalen Äquivalenz,
- wahrheitsfunktionalen Folgerung (bzw. Gültigkeit),

können mit Hilfe des Begriffs der wahrheitsfunktionalen Konsistenz erklärt werden; d.h., sie lassen sich auf diesen Begriff explanatorisch zurückführen (oder reduzieren).

5.13.1 Wahrheitsfunktionale Falschheit und wahrheitsfunktionale Konsistenz

Satz 5.13.1 (wahrheitsf. Falschheit und wahrheitsf. Konsistenz):

Ein Satz A ist **wahrheitsfunktional falsch** genau dann, wenn $\{A\}$ wahrheitsfunktional inkonsistent ist.

$\{A\}$ ist die **Einermenge** von A. (Siehe dazu Kapitel 2.)

Beweis von Satz 5.13.1.

(→)
Annahme: A ist wahrheitsfunktional falsch.
Dann gibt es (nach Definition 5.7) keine Wahrheitswertzuordnung, unter der A wahr ist.
Da A das einzige Element der Einermenge $\{A\}$ ist, gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der jedes Element dieser Menge wahr ist.
Somit ist $\{A\}$ (nach Definition 5.10) wahrheitsfunktional inkonsistent.

(←)
(„Von unten nach oben".) Annahme: $\{A\}$ ist wahrheitsfunktional inkonsistent.
Dann gibt es (nach Definition 5.10) keine Wahrheitswertzuordnung, unter der jedes Element von $\{A\}$ wahr ist. Da A das einzige Element seiner Einermenge ist, gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der A wahr ist. Somit ist A (nach Definition 5.7) wahrheitsfunktional falsch.

□

5.13.2 Wahrheitsfunktionale Wahrheit und wahrheitsfunktionale Konsistenz

Satz 5.13.2 (wahrheitsf. Wahrheit und wahrheitsf. Konsistenz):

Ein Satz A ist **wahrheitsfunktional wahr** genau dann, wenn $\{\neg A\}$ wahrheitsfunktional inkonsistent ist.

Beweis von Satz 5.13.2.

(→)
Annahme: A ist wahrheitsfunktional wahr.
Dann ist A (nach Definition 5.6) unter jeder Wahrheitswertzuordnung wahr.
Ein Satz ist unter einer Wahrheitswertzuordnung wahr genau dann, wenn die Negation dieses Satzes unter dieser Wahrheitswertzuordnung falsch ist (nach Definition 5.5.1).

Dann folgt aus der Annahme, dass $\neg A$ unter jeder Wahrheitswertzuordnung falsch ist. Dann gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der $\neg A$ wahr ist.
Dann gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der jedes Element von $\{\neg A\}$ wahr ist. Somit ist $\{\neg A\}$ wahrheitsfunktional (nach Definition 5.10) inkonsistent.

($\leftarrow$)
„Von unten nach oben".

$\square$

5.13.3 Wahrheitsfunktionale Indeterminiertheit und wahrheitsfunktionale Konsistenz

Aus Satz 5.13.1 und Satz 5.13.2 folgt:

Satz 5.13.3 (wahrheitsf. Indeterminiertheit und wahrheitsf. Konsistenz):

Ein Satz A ist **wahrheitsfunktional indeterminiert** genau dann, wenn weder $\{\neg A\}$ noch $\{A\}$ wahrheitsfunktional inkonsistent sind.

Anders audgedrückt: Ein Satz A ist wahrheitsfunktional indeterminiert genau dann, wenn sowohl $\{\neg A\}$ als auch $\{A\}$ wahrheitsfunktional konsistent sind. Es wird also behauptet, dass es mindestens eine Wahrheitswertzuordnung geben muss, unter der das Element von $\{\neg A\}$ wahr wird und dass es eine Wahrheitswertzuordnung geben muss, unter der das Element von $\{A\}$ wahr wird. Es wird nicht behauptet, dass es eine (einzige) Wahrheitswertzuordnung geben müsse, unter der die Elemente von $\{\neg A, A\}$ wahr werden.

5.13.4 Wahrheitsfunktionale Äquivalenz und wahrheitsfunktionale Konsistenz

Satz 5.13.4 (wahrheitsf. Äquivalenz und wahrheitsf. Konsistenz):

Sätze A und B sind **wahrheitsfunktional äquivalent** genau dann, wenn $\{\neg(A \leftrightarrow B)\}$ wahrheitsfunktional inkonsistent ist.

Wenn A und B Sätze von AL sind, dann ist $A \leftrightarrow B$ das korrespondierende materiale Bikonditional dieses Satzpaares.

Beweis von Satz 5.13.4.

Wir nehmen Satz 5.11.2 als Lemma (d.h. als Hilfssatz) an.

Lemma 5.11.2:

> Sätze A und B sind wahrheitsfunktional äquivalent genau dann, wenn ihr korrespondierendes materiales Bikonditional $A \leftrightarrow B$ wahrheitsfunktional wahr ist.

Aus diesem Lemma und aus Satz 5.13.2 (d.h. in diesem Fall aus)

> $A \leftrightarrow B$ ist wahrheitsfunktional wahr genau dann, wenn $\{\neg(A \leftrightarrow B)\}$ wahrheitsfunktional inkonsistent ist

folgt Satz 5.13.4

> Sätze A und B sind wahrheitsfunktional äquivalent genau dann, wenn $\{\neg(A \leftrightarrow B)\}$ wahrheitsfunktional inkonsistent ist.

□

Die Menge $\{\neg[(\neg X \vee Y) \leftrightarrow (X \to Y)]\}$, zum Beispiel, ist wahrheitsfunktional inkonsistent, da es keine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der jedes Element der Menge wahr ist.

X	Y	$\neg$	$[(\neg$	X	$\vee$	Y)	$\leftrightarrow$	(X	$\to$	Y)]
w	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**
w	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**
f	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**
f	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**

5.13.5 Wahrheitsfunktionale Folgerung und wahrheitsfunktionale Konsistenz

Es sei zunächst an den Begriff der Vereinigungsmenge erinnert, den wir in Kapitel 2 erläutert haben.

a) Wenn Γ eine Menge von Sätzen von AL ist und A ein beliebiger Satz von AL, können wir eine Menge bilden, die A und alle Elemente von Γ enthält:

$\Gamma \cup \{A\}$ lies: „die Vereinigungsmenge von Γ und der Einermenge von A"

Beispiel:

Γ:	$\{A, A \to B\}$
A:	C
$\Gamma \cup \{A\}$:	$\{A, A \to B\} \cup \{C\}$
	$= \{A, A \to B, C\}$

b) Wenn A ein Element von Γ ist, dann $\Gamma \cup \{A\} = \Gamma$.

Beispiel: $\{A, A \vee B\} \cup \{A \vee B\}$
$= \{A, A \vee B\}$.

c) Wenn $\Gamma = \varnothing$, dann $\Gamma \cup \{A\} = \{A\}$.

Satz 5.13.5 (wahrheitsf. Folgerung (Gültigkeit) und wahrheitsf. Konsistenz):

Für einen beliebigen Satz A und für eine beliebige Menge von Sätzen Γ gilt: $\Gamma \models A$ genau dann, wenn $\Gamma \cup \{\neg A\}$ ist wahrheitsfunktional inkonsistent.

Beweis von Satz 5.13.5.

(→)
Annahme: $\Gamma \models A$.
Dann gibt es (nach Definition 5.11.1) keine Wahrheitswertzuordnung, unter der jedes Element von Γ wahr ist und A falsch ist.
Aber $\neg A$ ist (nach Definition 5.5.1) unter einer Wahrheitswertzuordnung wahr genau dann, wenn A unter dieser Wahrheitswertzuordnung falsch ist.
Dann folgt, der Annahme entsprechend, dass es keine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der jedes Element von Γ wahr ist und $\neg A$ wahr ist.
Dann gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der jedes Element von $\Gamma \cup \{\neg A\}$ wahr ist.
Somit ist $\Gamma \cup \{\neg A\}$ wahrheitsfunktional inkonsistent (nach Definition 5.10).

(←)
„Von unten nach oben".

□