6. AUSSAGENLOGIK:

TABLEAUS

6.1 Motivation

Das Wahrheitstafelverfahren wird unhandlich, wenn die Anzahl verschiedener atomarer Komponenten des Satzes oder der Sätze, die auf ihre logischen Eigenschaften und die logischen Beziehungen in denen sie zueinander stehen, untersucht werden sollen, viel größer wird als 3. Das Tableauverfahren hingegen erlaubt in solchen Fällen (häufig) die Konstruktion konziser Tableaus.

6.2 Wahrheitstafeln, Wahrheitsbedingungen und Tableauregeln

Die Regeln für die Konstruktion von Tableaus lassen sich direkt aus den Wahrheitsbedingungen für die fünf wahrheitsfunktionalen Konnektive ableiten.

Charakteristische Wahrheitstafeln:

A	$\neg A$
w	**f**
f	**w**

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**
w	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**
f	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**
f	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**

Wahrheitsbedingungen:

Die Wahrheitsbedingungen für wahrheitsfunktional zusammengesetzte Sätze von AL lauten bekanntlich (siehe Abschnitt 5.5) wie folgt.

1.	$\mathbf{I}(\neg A) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$
2.	$\mathbf{I}(A \wedge B) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$
3.	$\mathbf{I}(A \vee B) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ oder $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$
4.	$\mathbf{I}(A \rightarrow B) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ oder $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$
5.	$\mathbf{I}(A \leftrightarrow B) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$ oder $\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$

Wahrheitstafeln für die Negationen von Sätzen der Formen 1 bis 5:

A	$\neg$	$\neg$	A
w	**w**	**f**	
f	**f**	**w**	

A	B	$\neg$	$(A \wedge B)$	$\neg$	$(A \vee B)$	$\neg$	$(A \rightarrow B)$	$\neg$	$(A \leftrightarrow B)$
w	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**
w	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**	**f**
f	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**
f	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**

Wahrheitsbedingungen für Negationen von Sätzen der Formen 1 bis 5:

6.	$\mathbf{I}(\neg\neg A) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$
7.	$\mathbf{I}(\neg(A \wedge B)) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ oder $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$
8.	$\mathbf{I}(\neg(A \vee B)) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$
9.	$\mathbf{I}(\neg(A \rightarrow B)) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$
10.	$\mathbf{I}(\neg(A \leftrightarrow B)) = \mathbf{w}$	gdw	$\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$ oder $\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$

Dekompositionsformen:

Wir wollen die Formen der zusammengesetzten Sätze, die als Argumente der Wahrheitswertzuordnungsfunktion **I** in den Wahrheitsbedingungen 1 bis 10 dienen, *Dekompositionsformen* nennen. (Das Wort ‚Argument' ist hier natürlich nicht im Sinne von Definition 1.4 zu verstehen, sondern im Sinne von Abschnitt 2.3. In f(a) = b ist a das Argument der Funktion f.)

Aussagenlogische Tableauregeln:

Die Regeln für die Konstruktion von Tableaus werden hier direkt aus den Wahrheitsbedingungen für die fünf wahrheitsfunktionalen Konnektive abgeleitet.

Dekomposition einer negierten Negation (¬¬D):

$\neg\neg A$ ***V***
A

Diese Regel ergibt sich aus Wahrheitsbedingung 6:
I($\neg\neg A$) = **w** gdw **I**(A) = **w**.

(Beobachtung: wahrheitsf. Äquivalenz von $\neg\neg A$ und A.)

Dekomposition einer Konjunktion (∧D):

$A \wedge B$ ***V***
A
B

Diese Regel ergibt sich aus Wahrheitsbedingung 2:
I($A \wedge B$) = **w** gdw **I**(A) = **w** und **I**(B) = **w**

Dekomposition einer negierten Konjunktion (¬∧D):

$\neg(A \wedge B)$ ***V***

$\neg A$ $\qquad\qquad$ $\neg B$

Diese Regel ergibt sich aus Wahrheitsbedingung 7:
I($\neg(A \wedge B)$) = **w** gdw **I**(A) = **f** oder **I**(B) = **f**;
und Wahrheitsbedingung 1:
I($\neg A$) = **w** gdw **I**(A) = **f**.

(Beobachtung: wahrheitsf. Äquivalenz von $\neg(A \wedge B)$ mit $\neg A \vee \neg B$.)

Dekomposition einer Disjunktion (∨D):

$$A \vee B\ \boldsymbol{V}$$

$$A \qquad\qquad B$$

Diese Regel ergibt sich aus Wahrheitsbedingung 3:
$\mathbf{I}(A \vee B) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ oder $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$.

Dekomposition einer negierten Disjunktion (¬∨D):

$\neg(A \vee B)\ \boldsymbol{V}$
$\neg A$
$\neg B$

Diese Regel ergibt sich aus Wahrheitsbedingung 8:
$\mathbf{I}(\neg(A \vee B)) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$; sowie aus Wahrheitsbedingung 1.

(Beobachtung: wahrheitsf. Äquivalenz von $\neg(A \vee B)$ mit $\neg A \wedge \neg B$.)

Dekomposition eines materialen Konditionals (→D):

$$A \rightarrow B\ \boldsymbol{V}$$

$$\neg A \qquad\qquad B$$

Diese Regel ergibt sich aus Wahrheitsbedingung 4:
$\mathbf{I}(A \rightarrow B) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ oder $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$; sowie aus Wahrheitsbedingung 1.

(Beobachtung: wahrheitsf. Äquivalenz von $A \rightarrow B$ mit $\neg A \vee B$.)

Dekomposition eines negierten materialen Konditionals (¬→D):

$\neg(A \rightarrow B)\ \boldsymbol{V}$
A
$\neg B$

Ergibt sich aus Wahrheitsbedingung 9:
$\mathbf{I}(\neg(A \rightarrow B)) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$; sowie aus Wahrheitsbedingung 1.

(Beobachtung: wahrheitsf. Äquivalenz von $\neg(A \rightarrow B)$ mit $A \wedge \neg B$.)

Dekomposition eines materialen Bikonditionals (↔D):

$A \leftrightarrow B$ ***V***

A	$\neg A$
B	$\neg B$

Diese Regel ergibt sich aus Wahrheitsbedingung 5:
$\mathbf{I}(A \leftrightarrow B) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$
oder
$\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$;
sowie aus Wahrheitsbedingung 1.

(Beobachtung: wahrheitsf. Äquivalenz von $A \leftrightarrow B$ mit $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.)

Dekomposition der Negation eines materialen Bikonditionals (¬↔D):

$\neg(A \leftrightarrow B)$

A	$\neg A$
$\neg B$	B

Diese Regel ergibt sich aus Wahrheitsbedingung 10:
$\mathbf{I}(\neg(A \leftrightarrow B)) = \mathbf{w}$ gdw $\mathbf{I}(A) = \mathbf{w}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{f}$
oder
$\mathbf{I}(A) = \mathbf{f}$ und $\mathbf{I}(B) = \mathbf{w}$;
sowie aus Wahrheitsbedingung 1.

(Beobachtung: wahrheitsf. Äquivalenz von $\neg(A \leftrightarrow B)$ mit $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.)

Verzweigende und nicht-verzweigende Regeln:

Die vorgestellten Tableauregeln lassen sich in verzweigende und in nicht-verzweigende Regeln einteilen. *Nicht-verzweigende Regeln* sind:

(¬¬D)
(∧D)
(¬∨D)
(¬→D)

Die Dekompositionsprodukte, die sich aus der Anwendung dieser Regeln ergeben, werden in zwei Zeilen untereinander geschrieben, da beide wahr sein müssen, wenn der dekomponierte Satz wahr werden soll.

(Nicht-verzweigende Regeln sind—abesehen von (¬¬D)—jene, die aus Wahrheitsbedingungen gewonnen worden sind, in denen rechts von ‚gdw' ein ‚und' als „Hauptkonnektiv (unserer Metasprache Deutsch)" vorkommt.)

Die übrigen Tableauregeln sind verzweigende Regeln. Die Dekompositionsprodukte, die sich aus der Anwendung verzweigender Regeln ergeben, werden in einer Zeile nebeneinander geschrieben, da es hinreicht, dass eines der Dekompositionsprodukte wahr ist, wenn der dekomponierte Satz wahr werden soll.

(Verzweigende Regeln sind jene, die aus Wahrheitsbedingungen gewonnen worden sind, in denen rechts von ‚gdw' ein inklusives (!) ‚oder' als „Hauptkonnektiv (von D)" vorkommt.)

6.3 Tableaus und wahrheitsfunktionale Konsistenz

Mit Hilfe von Tableauregeln lassen sich für die Sätze von AL *Tableaus* konstruieren. Tableaus lösen wahrheitsfunktional zusammengesetzte Sätze in einer solchen Weise auf, dass die Wahrheitsbedingungen dieser Zusammensetzungen dargestellt werden. (Man spricht deshalb von semantischen Tableaus.) Das *Tableauverfahren* beläuft sich auf die Konstruktion von Tableaus für Sätze von AL.

Das Tableauverfahren kann als Instrument für die Suche nach Wahrheitswertzuordnungen angesehen werden, unter denen die Sätze einer (endlichen) Menge Γ von Sätzen von AL wahr werden. Die Ermittlung einer solchen Wahrheitswertzuordnung ist aber (siehe Definition 5. 10) nichts anderes als die Ermittlung der Konsistenz von Γ. Diese wird nach dem Wahrheitstafelverfahren bekanntlich ermittelt, indem geprüft wird, ob es mindestens eine Wahrheitswertzuordnung an die atomaren Bestandteile der Elemente von Γ gibt, genauer: mindestens ein Fragment einer solchen Zuordnung (d. h. mindestens eine Zeile in der entsprechenden Wahrheitstafel), unter der alle Elemente von Γ wahr werden.
Genau das leistet auch das Tableauverfahren, aber in einer Weise die etwas direkter ist.

In Abschnitt 5.13 wurde gezeigt, dass sich die wahrheitsfunktionalen Eigenschaften und Beziehungen von Sätzen und von Mengen von Sätzen von AL mit Hilfe des Begriffs der wahrheitsfunktionalen Konsistenz definieren lassen. Dieses Ergebnis erlaubt den Einsatz von Tableaus für das Testverfahren von Sätzen von AL und von Mengen solcher Sätze auf ihre wahrheitsfunktionalen Eigenschaften und Beziehungen.

Das Tableauverfahren ist ebenso wie das Wahrheitstafelverfahren mechanisierbar. Ein mechanisches Entscheidungsverfahren ist eines, das in einer endlichen Abfolge von Schritten erlaubt, eine Antwort auf die Frage zu geben, ob z.B. ein Satz von AL eine logische Eigenschaft hat oder nicht.

6.4 Das Tableauverfahren

Eine Menge Γ von Sätzen von AL ist, wie wir wissen, wahrheitsfunktional konsistent genau dann, wenn es mindestens eine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der alle Elemente von Γ wahr sind. Das Tableauverfahren ist—wie gesagt—eine systematische Methode die erlaubt, für jede endliche Menge von Sätzen von AL zu bestimmen, ob die Menge wahrheitsfunktional konsistent ist oder nicht.

Bei der Konstruktion von Tableaus lassen sich grob sechs Schritt-Typen unterscheiden:

Schritt 1:	Auflistung der Elemente von Γ
Schritt 2:	Bestimmung der Dekompositionsformen der Elemente von Γ
Schritt 3:	Dekomposition der Elemente von Γ
Schritt 4:	„Abhaken“ der dekomponierten Elemente von Γ
Schritt 5:	Auffinden eines Wahrheitswertzuordnungsfragments (gegebenenfalls „Ankreuzen“ geschlossener Zweige)
Schritt 6:	Resümee

Diese Schritte sollen nun anhand einiger Beispielen illustriert werden.

Tableauverfahren (Beispiel 1):

Frage: Ist die folgende Satzmenge wahrheitsf. konsistent?

Testmenge: $\{A \wedge B,\ \neg C\}$

Schritt 1: Auflistung der *Elemente der Testmenge* (EdT) untereinander in einer Spalte.

1.	$A \wedge B$	EdT
2.	$\neg C$	EdT

Ziel: Ermittlung, ob es eine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der alle Sätze in der Spalte wahr werden.

Schritt 2: Ermittlung der *Dekompositionsform* der Elemente.
Hier: Erstes Element eine Konjunktion. Zweites Element eine Negation.

Schritt 3: *Dekomposition* von ‚$A \wedge B$’ in seine Konjunkte mit ($\wedge$D) und Eintrag der Konjunkte untereinander in die Spalte.

1.	$A \wedge B$	EdT
2.	$\neg C$	EdT
3.	A	1, $\wedge$D
4.	B	1, $\wedge$D

Schritt 4: Wenn die Dekomposition eines Satzes abgeschlossen ist, wird das angezeigt, indem der betreffende Satz mit einem *Haken* ‚***V***’ versehen wird. (Der Satz wird „abgehakt“.)

1.	$A \wedge B$ ***V***	EdT
2.	$\neg C$	EdT
3.	A	1, $\wedge$D
4.	B	1, $\wedge$D

Alle Sätze in diesem Tableau sind entweder dekomponiert worden (der Satz in Zeile 1), atomare Sätze (Zeilen 1 und 2) oder Negationen atomarer Sätze (wie z.B. ‚¬C' in Zeile 2). Negationen atomarer Sätze und atomare Sätze sind Literale und können nicht weiter dekomponiert werden.

> Definition 6.4.1 (Literal):
>
> Ein Satz ist ein **Literal** genau dann, wenn er ein Satz von AL ist, der entweder ein atomarer Satz von AL ist, oder eine Negation eines atomaren Satzes von AL.

Schritt 5: Auffinden eines *Wahrheitswertzuordnungsfragments*

Wenn wir einen Tableau haben, in dem die einzigen nicht dekomponierten Sätze Literale sind, ist es leicht zu bestimmen, ob es eine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der alle Elemente der Menge, die wir prüfen, wahr sind (d. h. ob die Menge wahrheitsfunktional konsistent ist).

- Wenn das Literal ein atomarer Satz ist, dann erhält der atomare Satz den Wahrheitswert **w**.

- Wenn das Literal eine Negation eines atomaren Satzes ist, dann erhält der atomare Satz (nicht das Literal!) den Wahrheitswert **f**.

Daraus ergibt sich das folgende *Wahrheitswertzuordnungsfragment:*

A	B	C
w	**w**	**f**

Kurz: A: **w**, B: **w**, C: **f**.

Schritt 6: *Resümee*

Jedes Element der Testmenge $\{A \wedge B, \neg C\}$ ist unter jeder Wahrheitswertzuordnung wahr, die ‚A', ‚B' und ‚C' die obigen Wahrheitswerte zuordnet. Somit ist die Testmenge wahrheitsfunktional konsistent.

Tableauverfahren (Beispiel 2):

Frage: Ist die folgende Satzmenge wahrheitsf. konsistent?

Testmenge: $\{D \wedge \neg E, \neg D\}$

Schritt 1: Auflistung der Elemente der Menge in einer Spalte

1.	$D \wedge \neg E$	EdT
2.	$\neg D$	EdT

Schritt 2: Ermittlung der Dekompositionsform der Nicht-Literale.

Konjunktion.

Schritt 3: Dekomposition mit ($\wedge$D)

1.	$D \wedge \neg E$	EdT
2.	$\neg D$	EdT
3.	D	1, $\wedge$D
4.	$\neg E$	1, $\wedge$D

Schritt 4: Abhaken der dekomponierten Zusammensetzung

1.	$D \wedge \neg E$ ***V***	EdT
2.	$\neg D$	EdT
3.	D	1, $\wedge$D
4.	$\neg E$	1, $\wedge$D

Schritt 5: Wahrheitswertzuordnungsfragment

Alle Literale in diesem Tableau müssen wahr sein, wenn die Elemente der Testmenge wahr sein sollen.

$\neg E$:	E: **f**
D:	D: **w**
$\neg D$:	D: **f**

Schritt 6: Aber es gibt keine Wahrheitswertzuordnung, derart dass E: **f**, D: **w** und **f**. Somit gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der alle Literale des Tableaus wahr sind. Somit ist die Testmenge wahrheitsfunktional inkonsistent.

Tableauverfahren (Beispiel 3):

Frage: Ist die folgende Satzmenge wahrheitsf. konsistent?

Testmenge: {F ∧ ¬H, G, ¬F ∨ ¬G}

Schritt 1: Auflistung

1.	F ∧ ¬H	EdT
2.	G	EdT
3.	¬F ∨ ¬G	EdT
4.	F	1, ∧D
5.	¬H	1, ∧D

Schritt 2: Ermittlung der Dekompositionsform der Nicht-Literale

Zwei Nicht-Literale: ‚F ∧ ¬H' und ‚¬F ∨ ¬G'.
Dekompositionsformen: Konjunktion und Disjunktion.

Schritt 3´: Dekomposition der Konjunktion mit (∧D).

1.	F ∧ ¬H	EdT
2.	G	EdT
3.	¬F ∨ ¬G	EdT
4.	F	1, ∧D
5.	¬H	1, ∧D

Schritt 4´: Abhaken der dekomponierten Konjunktion

1.	F ∧ ¬H ***V***	EdT
2.	G	EdT
3.	¬F ∨ ¬G	EdT
4.	F	1, ∧D
5.	¬H	1, ∧D

Schritt 3´´: Dekomposition der Disjunktion mit (∨D).

1.		F ∧ ¬H ***V***		EdT
2.		G		EdT
3.		¬F ∨ ¬G		EdT
4.		F		1, ∧D
5.		¬H		1, ∧D
6.	¬F		¬G	3, ∨D

Schritt 4´´: Abhaken der dekomponierten Disjunktion

1.		$F \wedge \neg H$ ***V***		EdT
2.		G		EdT
3.		$\neg F \vee \neg G$ ***V***		EdT
4.		F		1, $\wedge$D
5.		$\neg H$		1, $\wedge$D
6.	$\neg F$		$\neg G$	3, $\vee$D

Schritt 5: Wahrheitswertzuordnungsfragment

Die beiden Zweige des Tableaus müssen untersucht werden, um zu sehen, ob es eine Wahrheitswertzuordnung gibt, die alle Sätze der Testmenge wahr macht. Das ist genau dann der Fall, wenn die Literale von mindestens einem dieser Zweige allesamt wahr sein können.

> Charakterisierung 6.4.2 (Zweig):
>
> Ein **Zweig** (oder Pfad) eines Tableaus besteht aus allen Sätzen, die auf dem Pfad liegen, der an einem der unteren Enden des Tableaus beginnt und mit dem ersten Satz der ursprünglichen Spalte oben endet.

Linker Zweig:
Da sowohl ‚$\neg F$' als auch ‚F' in dem Zweig vorkommen: F: **w** und **f**.

Rechter Zweig:
Da sowohl ‚$\neg G$' als auch ‚G' in dem Zweig vorkommen: G: **w** und **f**.

Schritt 5*: Wenn in einem Zweig sowohl ein atomarer Satz als auch seine Negation vorkommen, ist am unteren Ende des Zweiges ein ‚**X**' einzutragen. (Der Zweig wird sozusagen „angekreuzt".)

1.		$F \wedge \neg H$ ***V***		EdT
2.		G		EdT
3.		$\neg F \vee \neg G$ ***V***		EdT
4.		F		1, $\wedge$D
5.		$\neg H$		1, $\wedge$D
6.	$\neg F$		$\neg G$	3, $\vee$D
	X		**X**	

Schritt 6: Resümee: Es gibt keine Wahrheitswertzuordnung derart, dass F: **w** und **f**, G: **w** und **f**. Somit gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der alle Elemente der Testmenge wahr sind. Die Testmenge ist also wahrheitsfunktional inkonsistent.

6.5 Terminologie und Definitionen

Geschlossener Zweig:	Ein Zweig, der sowohl einen atomaren Satz als auch seine Negation enthält (d. h. ein Zweig, der mit einem ‚**X**' endet).
Offener Zweig:	Ein Zweig, der kein geschlossener Zweig ist.
Vollständiger offener Zweig:	Ein Zweig, in dem jeder Satz entweder ein Literal oder ein dekomponierter (abgehakter) Satz ist und in dem kein atomarer Satz und seine Negation vorkommt.
Vollständiges Tableau:	Ein Tableau, dessen Zweige entweder geschlossene oder vollständige offene Zweige sind.
Geschlossenes Tableau:	Tableau, dessen sämtliche Zweige geschlossen sind.
Offenes Tableau:	Ein Tableau mit mindestens einem vollständigen offenen Zweig. (Ein offenes Tableau braucht kein vollständiges Tableau zu sein.)

Definition 6.5.1 (wahrheitsfunktionale Konsistenz (Tableau)):

Eine endliche Menge Γ von Sätzen von AL ist **wahrheitsfunktional konsistent** genau dann, wenn Γ ein Tableau mit mindestens einem vollständigen offenen Zweig hat.

Definition 6.5.2 (wahrheitsfunktionale Inkonsistenz (Tableau)):

Eine Menge Γ von Sätzen von AL ist **wahrheitsfunktional inkonsistent** genau dann, wenn mindestens eine endliche Teilmenge von Γ ein geschlossenes Tableau hat.

6.6 Strategeme für die Dekomposition

Die Sätze einer Menge lassen sich in unterschiedlicher Reihenfolge dekomponieren. Eine Abänderung der Dekompositionsreihenfolge kann das Tableau mehr oder weniger komplex werden lassen, aber sie ändert niemals das Endresultat der Dekomposition. (Mit anderen Worten: man erhält—bei korrekter Anwendung der Tableauregeln!—auf jeden Fall die richtige Antwort, aber den Weg dorthin kann man sich verkürzen, wenn man die Strategeme befolgt.)

Beispiel 1:

Frage: Ist die folgende Satzmenge wahrheitsf. konsistent?

Testmenge: $\{(\neg J \land K) \land (I \lor J), I \land K\}$

Dekompositionsreihenfolge 1:

1.		$(\neg J \land K) \land (I \lor J)$ ***V***	EdT
2.		$I \land K$ ***V***	EdT
3.		$\neg J \land K$ ***V***	1 $\land$D
4.		$I \lor J$ ***V***	1 $\land$D
5.		I	2 $\land$D
6.		K	2 $\land$D
7.		$\neg J$	3 $\land$D
8.		K	3 $\land$D
9.	I	J	4 $\lor$D
		X	

Zuordnung: I: **w**, J: **f**, K: **w**. Testmenge ist wahrheitsf. konsistent.

Dekompositionsreihenfolge 2:

1.	$(\neg J \land K) \land (I \lor J)$ ***V***		EdT
2.	$I \land K$ ***V***		EdT
3.	$\neg J \land K$ ***V***		1 $\land$D
4.	$I \lor J$ ***V***		1 $\land$D
5.	I	J	4 $\lor$D
6.	I	I	2 $\land$D
7.	K	K	2 $\land$D
8.	$\neg J$	$\neg J$	3 $\land$D
9.	K	K	3 $\land$D
		X	

Folgendes ist zu beachten: Wenn ein Satz dekomponiert wird, sind die Dekompositionsprodukte der Dekomposition in jeden offenen Zweig, der durch den Satz verläuft, welcher dekomponiert wird, einzutragen.

Beispiel 2:

Frage: Ist die folgende Satzmenge wahrheitsf. konsistent?

Testmenge: $\{L \wedge \neg M, (M \wedge L) \vee (M \wedge \neg L), \neg(M \vee \neg L)\}$.

1.		$L \wedge \neg M$ ***V***		EdT
2.		$\neg(M \vee \neg L)$ ***V***		EdT
3.		$(M \wedge L) \vee (M \wedge \neg L)$ ***V***		EdT
4.		L		$1 \wedge D$
5.		$\neg M$		$1 \wedge D$
6.		$\neg M$		$2 \neg\vee D$
7.		$\neg\neg L$		$2 \neg\vee D$
8.		L		$7 \neg\neg D$
9.	$(M \wedge L)$		$(M \wedge \neg L)$	$3 \vee D$
10.	M		M	$9 \wedge D$
11.	L		$\neg L$	$9 \wedge D$
	X		**X**	

Resümee: Die Testmenge wahrheitsfunktional inkonsistent.

Die Dekompositionsprodukte die aus mehreren Zusammensetzungen bestehen, werden nicht in derselben Zeile eingetragen. Ausnahme: Der Fall, in dem die Dekompositionsprodukte durch Anwendung derselben Tableauregel gewonnen werden, indem sie wiederholt auf Sätze angewendet wird, die in derselben Zeile vorkommen. Der Kommentar für die Zeilen 10 und 11, zum Beispiel, bezieht sich auf die Dekomposition von zwei Sätzen, d.h. auf die Dekompositionen von ‚$M \wedge L$' und ‚$M \wedge \neg L$'.

Da Verzweigung die Komplexität des Tableaus erhöht, wurden die Sätze in Zeile 1 und 2 dekomponiert, bevor der Satz in Zeile 3 dekomponiert wurde. Das bringt uns zum ersten Strategem für die Konstruktion von Tableaus.

> Strategem 1 (Tableau):
>
> Sätze, deren Dekomposition keine Verzweigung mit sich bringt, sind zuerst zu dekomponieren.

Somit sollten zunächst die nicht-verzweigenden Dekompositionsregeln zum Einsatz kommen: $(\neg\neg D)$, $(\wedge D)$, $(\neg\vee D)$ und $(\neg\rightarrow D)$.

Beispiel 3:

Frage: Ist die folgende Satzmenge wahrheitsf. konsistent?

Testmenge: $\{\neg(U \wedge T) \wedge \neg(U \wedge V), T \vee V, \neg(U \vee \neg V)\}$:

1.	$\neg(U \wedge T) \wedge \neg(U \wedge V)$ ***V***	EdT
2.	$T \vee V$ ***V***	EdT
3.	$\neg(U \vee \neg V)$ ***V***	EdT
4.	$\neg(U \wedge T)$ ***V***	1 $\wedge$D
5.	$\neg(U \wedge V)$ ***V***	1 $\wedge$D
6.	$\neg U$	3 $\neg\vee$D
7.	$\neg\neg V$ ***V***	3 $\neg\vee$D
8.	V	7 $\neg\neg$D
9.	T V	2 $\vee$D
10.	$\neg U$ $\neg T$ **X** $\neg U$ $\neg T$	4 $\neg\wedge$D
11.	$\neg U$ $\neg V$ **X** $\neg U$ $\neg V$ **X** $\neg U$ $\neg V$ **X**	5 $\neg\wedge$D

Fragmente:

Offener Zweig (links): U: **f**, T: **w**, V: **w**

Offener Zweig (Mitte): U: **f**, V: **w**. Was ‚T' zugewiesen wird ist hier gleichgültig. Aus diesem Zweig ergeben sich **zwei** Fragmente: U: **f**, T: **w**, V: **w** und U: **f**, T: **f**, V: **w**.

Offener Zweig (rechts): U: **f**, T: **f**, V: **w**.

Insgesamt zwei Fragmente:

Fragment 1: U: **f**, T: **w**, V:**w**
Fragment 2: U: **f**, T: **f**, V: **w**.

Resümee: Die Testmenge ist wahrheitsf. konsisitent.

Beispiel 4:

Frage: Ist die folgende Satzmenge wahrheitsf. konsistent?

Testmenge: $\{G \rightarrow H, H \rightarrow G, \neg G\}$

Dekompositionsreihenfolge 1:

1.		$G \rightarrow H$ ***V***			EdT
2.		$H \rightarrow G$ ***V***			EdT
3.		$\neg G$			
4.	$\neg G$			H	$1 \rightarrow D$
5.	$\neg H$	G **X**	$\neg H$ **X**	G **X**	$2 \rightarrow D$

Fragment: G: **f**, H: **f**.
Resümee: Die Testmenge ist wahrheitsf. konsistent.

Dekompositionsreihenfolge 2:

1.		$G \rightarrow H$ ***V***		EdT
2.		$H \rightarrow G$ ***V***		EdT
3.		$\neg G$		
4.	$\neg H$		G **X**	$2 \rightarrow D$
5.	$\neg G$	H **X**		$1 \rightarrow D$

Dieses Tableau ist nicht so komplex wie dasjenige, das aus Dekompositionsreihenfolge 1 resultiert (es hat drei, nicht vier Zweige). Das legt das folgende Strategem nahe.

> Strategem 2 (Tableau):
>
> Sätzen, deren Dekomposition im Schließen eines oder mehrerer Zweige resultiert, ist bei der Dekomposition der Vorzug zu geben.

Beispiel 5:

Frage: Ist die folgende Satzmenge wahrheitsf. konsistent?

Testmenge: $\{\neg(N \leftrightarrow O), O \leftrightarrow P, \neg N\}$

1.		$\neg(N \leftrightarrow O)$ ***V***			EdT
2.		$O \leftrightarrow P$ ***V***			EdT
3.		$\neg N$			EdT
4.	N		$\neg N$		1 $\neg\leftrightarrow$D
5.	$\neg O$		O		1 $\neg\leftrightarrow$D
	X				
6.		O		$\neg O$	2 $\leftrightarrow$D
7.		P		$\neg P$	2 $\leftrightarrow$D
				X	

Hier ist die Reihenfolge der Dekomposition bedeutsam. Wenn die Dekomposition des Satzes in Zeile 2 zuerst vorgenommen worden wäre, dann würden zwei Zweige entstehen, von denen keiner sogleich schließen würde.

Fragment: N: **f**, O: **w**, P: **w**.
Resümee: Die Menge ist wahrheitsf. konsistent.

Beispiel 6:

Testmenge: $\{Q \rightarrow (R \leftrightarrow S), \neg(S \rightarrow Q)\}$

1.		$Q \rightarrow (R \leftrightarrow S)$ ***V***			EdT
2.		$\neg(S \rightarrow Q)$ ***V***			EdT
3.		S			$2\ \neg\!\rightarrow\!D$
4.		$\neg Q$			$2\ \neg\!\rightarrow\!D$
5.	$\neg Q$		$(R \leftrightarrow S)$ ***V***		$1 \rightarrow\!D$
6.			R	$\neg R$	$5 \leftrightarrow\!D$
7.			S	$\neg S$	$5 \leftrightarrow\!D$
				X	

Zwei vollständige offene Zweige. Wir erhalten insgesamt zwei Fragmente:

Fragment 1: Q: **f**, R: **w**, S: **w**
Fragment 2: Q: **f**, R: **f**, S: **w**

Resümee: Die Menge ist wahrheitsf. konsistent.

Beobachtung:

Der linke offene Zweig wird schon in Zeile 5 vollständig. Somit ist bereits hier klar, dass die Testmenge konsistent ist. Deshalb:

Strategem 3 (Tableau):

Die Dekomposition ist zu beenden, wenn das Tableau eine Antwort auf die gestellte Frage gibt.

Somit kann die Dekomposition im obigen Fall nach Zeile 5 beendet werden

1.		$Q \rightarrow (R \leftrightarrow S)$ ***V***		EdT
2.		$\neg(S \rightarrow Q)$ ***V***		EdT
3.		S		$2\ \neg\!\rightarrow\!D$
4.		$\neg Q$		$2\ \neg\!\rightarrow\!D$
5.	$\neg Q$		$(R \leftrightarrow S)$ ***V***	$1 \rightarrow\!D$

Dekomposition einer negierten Negation (¬¬D):

$$\begin{array}{l} \neg\neg A \\ A \end{array}$$

Dekomposition einer Konjunktion (∧D):

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ A \\ B \end{array}$$

Dekomposition einer negierten Konjunktion (¬∧D):

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \wedge B) & \\ & / \quad \backslash & \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

Dekomposition einer Disjunktion (∨D):

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ & / \quad \backslash & \\ A & & B \end{array}$$

Dekomposition einer negierten Disjunktion (¬∨D):

$$\begin{array}{l} \neg(A \vee B) \\ \neg A \\ \neg B \end{array}$$

Dekomposition eines materialen Konditionals (→D):

$$\begin{array}{ccc} & A \rightarrow B & \\ & / \quad \backslash & \\ \neg A & & B \end{array}$$

Dekomposition eines negierten materialen Konditionals (¬→D):

$$\begin{array}{l} \neg(A \rightarrow B) \\ A \\ \neg B \end{array}$$

Dekomposition eines materialen Bikonditionals (↔D):

$$\begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B & \\ & / \quad \backslash & \\ A & & \neg A \\ B & & \neg B \end{array}$$

Dekomposition der Negation eines materialen Bikonditionals (¬↔D):

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \leftrightarrow B) & \\ & / \quad \backslash & \\ A & & \neg A \\ \neg B & & B \end{array}$$

6.7 Tableaus und wahrheitsfunktionale Wahrheit

Definition 6.7 (wahrheitsfunktionale Wahrheit (Tableau)):

Ein Satz *A* von AL ist **wahrheitsfunktional wahr** genau dann, wenn die Menge {¬*A*} ein geschlossenes Tableau hat.

Beispiel 1:

Ist der Satz ‚ A → [B → (A → B)]' wahrheitsfunktional wahr? D. h. hat {¬(A → [B → (A → B)])} ein geschlossenes Tableau? Annahme: Ja.

Testmenge: {A → [B → (A → B)]}

Tableau:

1.	¬(A → [B → (A → B)]) ***V***	EdT
2.	A	1 ¬→D
3.	¬[B → (A → B)] ***V***	1 ¬→D
4.	B	3 ¬→D
5.	¬(A → B) ***V***	3 ¬→D
6.	A	5 ¬→D
7.	¬B	5 ¬→D
	X	

Das Tableau ist geschlossen. Somit gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der ‚¬(A → [B → (A → B)])' wahr wird. Da dieser Satz eine Negation ist, gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der der ursprüngliche Satz, ‚A → [B → (A → B)]' falsch ist. Somit ist dieser Satz wahrheitsfunktional wahr. Kurz: |= A → [B → (A → B)].

Beispiel 2:

Ist ‚(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧¬ E)' wahrheitsfunktional wahr?
D. h. hat {¬[(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧¬ E)]} ein geschlossenes Tableau? Annahme: Ja.

Testmenge: {¬[(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧¬ E)]}

Tableau:

1.	¬[(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧¬ E)] ***V***		EdT
2.	¬(C ∨ C)	¬¬¬(E ∧¬ E)	1 ¬∧D
3.	¬C		2 ¬∨D
4.	¬C		2 ¬∨D

Strategem 3 wurde befolgt. Das Tableau hat mindestens einen vollständigen offenen Zweig. Das Tableau ist deshalb nicht geschlossen. Der Satz ‚$(C \lor C) \land \neg\neg(E \land \neg E)$’ ist somit nicht wahrheitsfunktional wahr.

Ein Satz von AL muss ja wahrheitsfunktional wahr, wahrheitsfunktional falsch oder wahrheitsfunktional indeterminiert sein. Ist Satz ‚$(C \lor C) \land \neg\neg(E \land \neg E)$’ nun wahrheitsfunktional falsch oder wahrheitsfunktional indeterminiert, wenn er keine Tautologie ist?

Wir nehmen an, dass der Satz wahrheitsfunktional falsch ist und konstruieren ein zweites Tableau. In diesem Fall muss die Menge $\{(C \lor C) \land \neg\neg(E \land \neg E)\}$ ein geschlossenes Tableau haben.

1.	$(C \lor C) \land \neg\neg(E \land \neg E)$ ***V***	EdT
2.	$C \lor C$	1 $\land$D
3.	$\neg\neg(E \land \neg E)$ ***V***	1 $\land$D
4.	$E \land \neg E$	3 $\neg\neg$D
5.	E	4 $\land$D
6.	$\neg E$	4 $\land$D
	X	

Strategem 3 wurde befolgt. (Der Satz in Zeile 4 ist nicht dekomponiert worden.) Das Tableau schließt, ohne dass alle Literale dekomponiert worden sind. (An diesem Beispiel wird der Inhalt von Definition 6.5.2 gut deutlich.) Es gibt keine Wahrheitswertzuordnung, unter der ‚$(C \lor C) \land \neg\neg(E \land \neg E)$’ wahr wird. Er ist somit wahrheitsfunktional falsch: $|\neq (C \lor C) \land \neg\neg(E \land \neg E)$. (Somit ist er weder wahrheitsfunktional wahr, noch wahrheitsfunktional indeterminiert.)

6.8 Tableaus und wahrheitsfunktionale Falschheit

Definition 6.8 (wahrheitsfunktionale Falschheit (Tableau)):

Ein Satz *A* von AL ist **wahrheitsfunktional falsch** genau dann, wenn die Menge $\{A\}$ ein geschlossenes Tableau hat.

6.9 Tableaus und wahrheitsfunktionale Indeterminiertheit

Definition 6.9 (wahrheitsfunktionale Indeterminiertheit (Tableau)):

Ein Satz *A* von AL ist **wahrheitsfunktional indeterminiert** genau dann, wenn weder die Menge $\{A\}$ noch die Menge $\{\neg A\}$ ein geschlossenes Tableau hat.

6.10 Weitere Hinweise zur Konstruktion von Tableaus

Fälle, in denen zwei Tableaus konstruiert werden müssen:

Die Antwort auf die Frage, nach dem wahrheitsfunktionalen Status eines Satzes A kann häufig erst nach der Konstruktion zweier Tableaus gegeben werden: eines Tableaus für $\{A\}$ und eines Tableaus für $\{\neg A\}$.

Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn man wie in Beispiel 2 den wahrheitsfunktionalen Status von A zuerst falsch einschätzt. Schätzt man ihn gleich richtig ein, dann kann sich die Konstruktion eines zweiten Tableaus erübrigen wie in Beispiel 1.

Wie die Konstruktion des erforderlichen zweiten Tableaus vermieden werden kann:

Angenommen, wir schätzen, dass Satz A wahrheitsfunktional wahr [falsch] ist und konstruieren deshalb einen Tableau für $\{\neg A\}$ [für $\{A\}$]. Es stellt sich heraus, dass das Tableau nicht schließt, da er einen vollständigen offenen Zweig hat. A ist deshalb entweder wahrheitsfunktional falsch [wahr] oder wahrheitsfunktional indeterminiert. Um zu entscheiden, was von beidem A ist, müsste—nach der ersten Methode—ein zweites Tableau, diesmal für$\{A\}$ [für $\{\neg A\}$], konstruiert werden. Die zweite Methode erspart uns die Konstruktion des Tableaus für $\{A\}$ [für $\{\neg A\}$]. Danach ist wie folgt vorzugehen:

Annahme: A ist wahrheitsfunktional wahr [falsch].

Schritt 1: Ermittle die Anzahl der Wahrheitswertzuordnungsfragmente für den Satz A. (Die Anzahl beträgt 2^n Fragmente, wobei n die Zahl der atomaren Komponenten von A ist. Siehe dazu Abschnitt 5.3, Schritt 1.)

Schritt 2: Stelle den Tableau für $\{\neg A\}$ [für $\{A\}$] fertig. Wenn das Tableau für $\{\neg A\}$ [für $\{A\}$] nicht schließt, dann ist A nicht wahrheitsfunktional wahr [falsch]. Somit ist A entweder wahrheitsfunktional falsch [wahr] oder wahrheitsfunktional indeterminiert.

Schritt 3: Bestimme, welche Wahrheitswertzuordnungsfragmente aus diesem Tableau ermittelt werden können. Es gibt zwei Fälle:

a) Wenn alle 2^n Fragmente aufgefunden werden, dann ist $\neg A$ [A] unter jeder Wahrheitswertzuordnung wahr. Somit ist A wahrheitsfunktional falsch [wahr].
b) Wenn nicht alle 2^n Fragmente aufgefunden werden, dann ist $\neg A$ [A] unter mindestens einer Wahrheitswertzuordnung falsch, somit ist A unter einer Wahrheitswertzuordnung wahr [falsch]. Somit ist A wahrheitsfunktional indeterminiert.

Diese Methode hat einen Nachteil. Wenn 2^n viel größer ist als 8, dann ist es bequemer, ein zweites Tableau zu konstruieren als die relevanten Fragmente zu ermitteln. Es folgen zwei Beispiele zur Anwendung der zweiten Methode:

Beispiel 3 (vgl. Beispiel 2):

Ist ‚(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧ ¬E)' wahrheitsfunktional wahr?
D. h. hat {¬[(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧ ¬E)]} ein geschlossenes Tableau? Annahme: Ja.

Testmenge: {¬[(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧ ¬E)]}

Schritt 1: *A* hat zwei atomare Komponenten, somit $2^2 = 4$ Fragmente.

Schritt 2: Fertigstellung des Tableaus.

1.		¬[(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧ ¬E)] ***V***			EdT
2.	¬(C ∨ C) ***V***		¬¬¬(E ∧ ¬E) ***V***		1 ¬∧D
3.	¬C				2 ¬∨D
4.	¬C				2 ¬∨D
5.			¬(E ∧ ¬E) ***V***		2 ¬¬D
6.		¬E		¬¬E ***V***	5 ¬∧D
7.				E	6 ¬¬D

Klar, Strategem 3 darf hier nicht eingesetzt werden, da das Tableau ja fertiggestellt werden muss. Alle Zweige dieses Tableaus sind vollständig und offen. Der geprüfte Satz ‚(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧ ¬E)' ist keine wahrheitsfunktionale Wahrheit, da {¬[(C ∨ C) ∧ ¬¬(E ∧ ¬E)]} kein geschlossenes Tableau hat.

Schritt 3: Ermittlung der Fragmente.

linker Zweig: C: **f**. E kann beide Wahrheitswerte annehmen. Somit zwei Fragmente für den linken Zweig:
Fragment 1 (l. Zw.): C: **f**, E: **w**
Fragment 2 (l. Zw.): C: **f**, E: **f**

mittlerer Zweig: E: **f**. C kann beide Wahrheitswerte annehmen. Somit zwei Fragmente für den mittleren Zweig:
Fragment 1 (m. Zw.): C: **w**, E: **f**
Fragment 2 (m. Zw.): C: **f**, E: **f**

rechter Zweig: E: **w**. C kann beide Wahrheitswerte annehmen. Somit zwei Fragmente für den rechten Zweig:
Fragment 1 (r. Zw.): C: **w**, E: **w**
Fragment 2 (r. Zw.): C: **f**, E: **w**

Es lassen sich alle vier Fragmente auffinden.

	C	E	
1.	**w**	**w**	Fragment 1 (r. Zw.)
2.	**w**	**f**	Fragment 1 (m. Zw.)
3.	**f**	**w**	Fragment 1 (l. Zw.) = Fragment 2 (r. Zw.)
4.	**f**	**f**	Fragment 2 (l. Zw.) = Fragment 2 (m. Zw.)

Somit ist ‚$\neg[(C \vee C) \wedge \neg\neg(E \wedge \neg E)]$' unter jeder Wahrheitswertzuordnung wahr. Somit ist ‚$(C \vee C) \wedge \neg\neg(E \wedge \neg E)$' wahrheitsfunktional falsch.
D. h. $\not\models (C \vee C) \wedge \neg\neg(E \wedge \neg E)$. Wir haben hier den Fall 3 (a).

Beispiel 4:

Ist ‚$F \wedge G$' wahrheitsfunktional wahr?
D. h. hat $\{\neg(F \wedge G)\}$ ein geschlossenes Tableau? Annahme: Ja.

Schritt 1: $2^2 = 4$ Wahrheitswertzuordnungsfragmente.

Schritt 2: Fertigstellung des Tableaus.

1. $\neg(F \wedge G)$ ***V*** EdT

2. $\neg F$ $\neg G$ 1 $\neg\wedge$D

Somit ist der Satz ‚$F \wedge G$' ist nicht wahrheitsfunktional wahr, da die Menge $\{\neg(F \wedge G)\}$ kein geschlossenes Tableau hat.

Schritt 3: Ermittlung der Fragmente.

linker Zweig: F: **f**. G kann beide Wahrheitswerte annehmen. Somit zwei Fragmente für den linken Zweig:
Fragment 1 (l. Zw.): F: **f**, G: **w**
Fragment 2 (l. Zw.): F: **f**, G: **f**

rechter Zweig: G: **f**. F kann beide Wahrheitswerte annehmen. Somit zwei Fragmente für den rechten Zweig:
Fragment 1 (r. Zw.): F: **w**, G: **f**
Fragment 2 (r. Zw.): F: **f**, G: **f**

Es können nicht alle 4 Fragmente aufgefunden werden, nur drei. Es fehlt das Fragment F: **w**, G: **w**. Das ist genau das Fragment, unter dem ‚$\neg(F \wedge G)$' falsch ist. Somit ist ‚$\neg(F \wedge G)$' unter mindestens einer Wahrheitswertzuordnung falsch, somit ist ‚$F \wedge G$' unter einer Wahrheitswertzuordnung wahr. Somit ist ‚$F \wedge G$' wahrheitsfunktional indeterminiert. Wir haben hier den Fall 3 (b).

6.11 Tableaus und wahrheitsfunktionale Äquivalenz.

Sätze *A* und *B* sind wahrheitsfunktional äquivalent genau dann, wenn ihr korrespondierendes materiales Bikonditional $A \leftrightarrow B$ wahrheitsfunktional wahr ist (siehe Satz 5.11.2). Und das korrespondierende materiale Bikonditional $A \leftrightarrow B$ ist wahrheitsfunktional wahr genau dann, wenn $\{\neg(A \leftrightarrow B)\}$ ein geschlossenes Tableau hat (siehe Definition 6.7). Die Definition der wahrheitsfunktionalen Äquivalenz mit Hilfe des Tableaubegriffs lautet entsprechend:

> Definition 6.11 (wahrheitsfunktionale Äquivalenz (Tableau)):
>
> Sätze *A* und *B* von AL sind **wahrheitsfunktional äquivalent** genau dann, wenn die Menge $\{\neg(A \leftrightarrow B)\}$ ein geschlossenes Tableau hat.

Beispiel 5:

Sind ‚$\neg(H \wedge H)$' und ‚$\neg(H \vee H)$' wahrheitsfunktional äquivalent?
D. h. hat $\{\neg[\neg(H \wedge H) \leftrightarrow \neg(H \vee H)]\}$ ein geschlossenes Tableau?

1.			$\neg[\neg(H \wedge H) \leftrightarrow \neg(H \vee H)]$ ***V***		EdT
2.	$\neg(H \wedge H)$ ***V***			$\neg\neg(H \wedge H)$ ***V***	1 $\neg\leftrightarrow$D
3.	$\neg\neg(H \vee H)$ ***V***			$\neg(H \vee H)$ ***V***	1 $\neg\leftrightarrow$D
4.	$H \vee H$ ***V***				3 $\neg\neg$D
5.				$H \wedge H$ ***V***	2 $\neg\neg$D
6.				H	5 $\wedge$D
7.				H	5 $\wedge$D
8.				$\neg$H	3 $\neg\vee$D
9.				**X**	
10.	H		H		4 $\vee$D
11.	$\neg$H	$\neg$H	$\neg$H	$\neg$H	2 $\neg\wedge$D
	X	**X**	**X**	**X**	

Resümee: Die beiden Sätze sind wahrheitsfunktional äquivalent.

6.12 Tableaus und wahrheitsfunktionale Folgerung.

> Definition 6.12 (wahrheitsfunktionale Folgerung (Tableau)):
>
> Satz A von AL **folgt wahrheitsfunktional** aus einer endlichen Menge Γ von Sätzen von AL genau dann, wenn die Menge $\Gamma \cup \{\neg A\}$ ein geschlossenes Tableau hat.

Ein Argument ist somit genau dann **wahrheitsfunktional gültig**, wenn die Menge, die aus den Prämissen und der Negation (!) der Konklusion besteht, ein geschlossenes Tableau hat.

Beispiel 6:

Folgt ‚$\neg J \vee I$' wahrheitsfunktional aus $\{J \rightarrow K, K \rightarrow I\}$?
D.h. Hat $\{J \rightarrow K, K \rightarrow I\} \cup \{\neg(\neg J \vee I)\}$ ein geschlossenes Tableau?

1.		$J \rightarrow K$			EdT
2.		$K \rightarrow I$			EdT
3.		$\neg(\neg J \vee I)$			EdT
4.		$\neg\neg J$			3 $\neg\vee$D
5.		$\neg I$			3 $\neg\vee$D
6.		J			4 $\neg\neg$D
7.	$\neg J$ **X**		K		1 $\rightarrow$D
8.		$\neg K$ **X**		I **X**	2 $\rightarrow$D

Resümee: $\{J \rightarrow K, K \rightarrow I\} \models \neg J \vee I$