8. PRÄDIKATENLOGIK:

INFORMELLE EINFÜHRUNG

8.1 Motivation

Aus der Tatsache, dass ein Satz von AL nicht wahrheitsfunktional wahr (falsch) ist, folgt nicht, dass der deutsche Satz, den er symbolisiert nicht logisch wahr (falsch) ist.
Aus der Tatsache, dass die am besten geeignete Symbolisierung eines deutschen Arguments in AL wahrheitsfunktional ungültig ist, folgt nicht, dass das ursprüngliche deutsche Argument ungültig ist. Entsprechendes gilt für die anderen logischen Eigenschaften und Relationen.

Der Grund: Die Sprache AL ist nicht ausdrucksstark genug, um eine angemessene Symbolisierung eines sehr großen Anteils natürlichsprachlicher Sätze zu erlauben. Das ist deswegen der Fall, weil die Sprache AL (abgesehen von Satzkonnektiven) Sätze als die kleinsten Einheiten der logischen Analyse betrachtet und somit alle subsententiellen Beziehungen unberücksichtigt lässt.

Illustration:

Das folgende Argument ist deduktiv gültig, obwohl es keine Symbolisierung in AL hat, die wahrheitsfunktional gültig ist.

(1) Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Somit ist Sokrates sterblich.

Ein Versuch einer Symbolisierung von (1) in AL:

A
B
_____
C

Problem: Mit Hilfe der Syntax von AL (die subsententielle Beziehungen unberücksichtigt läßt) kann nicht gezeigt werden, dass es eine Beziehung zwischen den Sachverhalten (in einem vor-theoretischen Sinn von ‚Sachverhalt') des steblich-Seins aller Menschen, des Mensch-Seins des Sokrates und des sterblich-Seins des Sokrates gibt. Entsprechendes gilt für die folgenden Argumente:

(2) Alles besteht aus Materie. Somit besteht Sokrates aus Materie.

Symbolisierung:

$$\frac{A}{B}$$

(3) Sokrates besteht aus Materie. Somit gibt es etwas, das aus Materie besteht.

Symbolisierung:

$$\frac{C}{D}$$

Beobachtung: Es hat den Anschein, dass die Argumente (2) und (3) nicht dieselbe Form haben können. Die Verschiedenheit der logischen Form dieser Argumente lässt sich in AL aber nicht adäquat wiedergeben.

8.2 Namen, Kennzeichnungen und Pronomina im Deutschen

In diesem Abschnitt wird (in einer „informalen" Weise) eine neue Sprache entwickelt, PL, (Sprache für die Prädikatenlogik), die erlaubt, viele subsententielle Beziehungen auszudrücken.

8.2.1 Singuläre Terme

Ein singulärer Term ist, grob gesagt, ein Wort oder eine Phrase, das oder die genau ein Ding (bzw. einen Gegenstand) bezeichnet (bzw., denotiert, designiert, auf ihn referiert oder Bezug nimmt) oder bezeichnen soll. Man unterscheidet zwei Arten von singulären Termen:

- Namen (genauer: Eigennamen)
- singuläre Kennzeichnungen.

Bei den Dingen, die von singulären Termen bezeichnet werden können, handelt es sich um Dinge, die (wie wir hier annehmen wollen) unter die ontologische Kategorie der Individuen bzw. Einzeldinge fallen (z.B. um Artefakte wie dieses Pult hier oder um Organismen wie Moppel den Zwerghasen von Laura, oder um abstrakte Einzeldinge wie die kleinste Primzahl – vorausgesetzt natürlich Zahlen können sinnvoller Weise als Einzeldinge betrachtet werden) und nicht um Eigenschaften, Relationen, Sachverhalte, Ereignisse oder Entitäten, die anderen ontologischen Kategorien angehören.

8.2.2 Namen

Als Beispiele für Namen (oder Eigennamen), lassen sich z. B.

- ‚Gottfried Wilhelm Leibniz',
- ‚Rudi Völler',
- ‚Anne',
- ‚Moppel' oder
- ‚Pippi Langstrumpf'

anführen. In der Regel werden z.B. auch Namen geographischer Größen (etwa von Städten oder von Flüssen) oder von Institutionen (Firmen, Behörden u. ä.) als Eigennamen behandelt. (Vom ontologischen Standpunkt kann bezweifelt werden, ob Städte Individuen sind.) Für unsere Zwecke genügt es, wenn wir sagen, dass Eigennamen aufgrund einfacher Konventionen den Dingen, die sie bezeichnen zugewiesen werden.

(Nach der prominenten Theorie der Eigennamen des amerikanischen Philosophen Saul Kripke (*1940)[1], bezeichnen Eigennamen in einer solchen Weise, dass sie in allen denkbaren Umständen bzw. in allen „möglichen Welten" ein und dasselbe Individuum herausgreifen bzw. bezeichnen. Sie werden gemäß dieser Theorie ‚**starre Designatoren**' (*rigid designators*) genannt. So greift der Eigenname ‚Platon' in allen „möglichen Welten" das Individuum Platon heraus.)

8.2.2 Singuläre Kennzeichnungen

Singuläre Kennzeichnungen, wie z. B.

- ‚der Entdecker der Dampfmaschine',
- ‚der Autor von ‚Sein und Zeit''
- ‚der Weltfußballer des Jahres 2002'
- ‚die Person, mit der Wiebke gerade telephoniert', und
- ‚Cems einzige Schwester'
- ‚der gegenwärtige Zar von Russland'

greifen ein Ding heraus oder sollen ein Ding herauspicken, indem sie eine einzig für das Ding vorgesehene Beschreibung angeben.

Eine singuläre Kennzeichnung ist eine Beschreibung, die aufgrund ihrer grammatischen Struktur genau ein Ding kennzeichnen soll. Somit ist ‚Sandys aktueller Ehemann' eine singuläre Kennzeichnung, ‚Sandys aktueller Liebhaber' hingegen ist keine – der letztere Ausdruck kann mehrere Personen angemessen kennzeichnen, der erste hingegen kann höchstens eine Person kennzeichnen.

(Nach der Theorie von Kripke gibt es einen wichtigen Unterschied in der Art und Weise wie Eigennamen und Kennzeichnungen bezeichnen. Kennzeichnungen greifen – ebenso wie

[1] S. Kripke: *Naming and Necessity*. Oxford / Cambridge Mass.: Blackwell, 1980.

Eigennamen – genau ein Ding heraus, aber – im Gegensatz zu Eigennamen – nicht in allen „möglichen Welten". So greift der Eigenname ‚Platon' in allen „möglichen Welten" Platon heraus, die Kennzeichnung ‚der Lehrer des Aristoteles' hingegen tut das nur in der „wirklichen Welt" aber nicht in allen „möglichen Welten". Der Grund: Glaukon, zum Beispiel, und nicht Platon hätte der Lehrer von Aristoteles sein können. Somit gibt eine „mögliche Welt", in der Glaukon und nicht Platon mit ‚der Lehrer des Aristoteles' bezeichnet wird. Singuläre Kennzeichnungen sind nach Kripkes Theorie also keine starren Designatoren. Auch in dieser Theorie gibt es Ausnahmen. Die Kennzeichnung ‚die kleinste Primzahl' ist ein starrer Designator. Sie bezeichnet in allen denkbaren Situationen die Zahl 2. Ein Nominalist, der nicht an die Existenz von Zahlen glaubt, wird dieser Auffassung nicht zustimmen.)

Wir werden auf singuläre Kennzeichnungen ausführlicher zu sprechen kommen, nachdem das Identitätsprädikat ‚=' eingeführt worden ist.

8.2.3 Nicht-bezeichnende singuläre Terme

Es gibt singuläre Terme im Deutschen, die keinen Gegenstand bezeichnen. In seinem gewöhnlichen Gebrauch bezeichnen Eigennamen fiktiver Charaktäre wie ‚Pippi Langstrumpf' und ‚Frodo' nicht, da es de facto keine solchen Personen wie Pippi Langstrumpf oder Frodo gibt. Entsprechendes gilt für fiktive singuläre Kennzeichnungen wie ‚der Brunnen der ewigen Jugend'.

In ähnlicher Weise bezeichnet auch eine singuläre Kennzeichnung nicht, wenn nichts diese Kennzeichnung erfüllt, d. h. wenn kein Ding in einer einzig auf dieses Ding zutreffenden Weise gekennzeichnet wird. (Solche Kennzeichnungen werden auch „leere Kennzeichnungen" genannt.) Beispiele: ‚die größte Primzahl', ‚der gegenwärtige Zar von Russland'.

8.2.4 Singuläre Terme und Kontext

Welches Ding (wenn überhaupt eins) ein Name oder eine singuläre Kennzeichnung bezeichnet hängt von dem Kontext ab, in dem der betreffende singuläre Term benutzt wird. Kurz zur Illustration:

Mit dem Eigennamen ‚Friedrich Nietzsche' bezieht man sich in der Regel auf einen deutschen Philosophen. Aber ein Philosophiehistoriker z.B. könnte auch seinen Rauhaardackel nach diesem Philosophen benennen. In diesem Fall wird es Kontexte geben, in denen er und seine Freunde den singulären Term ‚Friedrich Nietzsche' benutzen, um einen Rauhaardackel zu bezeichnen und nicht eine Gestalt der Philosophiegeschichte.

In derselben Weise kann ‚die Person, mit Wiebke gerade telefoniert' eine Person in einem Kontext bezeichnen und eine andere Person in einem anderen Kontext. Konventionen:

i) Wenn nicht anders angegeben, wird angenommen, dass es für jeden Satz einen Kontext gibt, in dem seine singulären Terme tatsächlich bezeichnen.

ii) Wenn mit einer Menge von Sätzen gearbeitet wird, muss der angenommene Kontext für alle Elemente dieser Satzmenge derselbe sein (d. h. ein singulärer Term, der in einem deutschen Textausschnitt öfter vorkommt, bezeichnet in allen seinen Vorkommnissen dasselbe Ding).

8.2.5 Pronomina

Im Deutschen werden oftmals Pronomina an Stelle von Eigennamen und singulären Kennzeichnungen benutzt.

Beispiel:

Satz (D): Wenn Richie geblitzt worden ist, dann ist <u>er</u> zu schnell gefahren.

Paraphrase (D): Wenn Richie geblitzt worden ist, dann ist <u>Richie</u> zu schnell gefahren.

(Nicht alle Sätze mit Pronomina lassen sich in der standardmäßigen Prädikatenlogik angemessen analysieren.)

8.3 Prädikate und Sätze im Deutschen

8.3.1 Bildung von Prädikaten (D)

Deutsche Prädikate sind Teile deutscher Sätze, die (wie wir hier annehmen) erhalten werden können, indem ein oder mehrere singuläre Terme in einem deutschen Satz gelöscht werden. Betrachten wir dazu den folgenden Satz:

‚Betlehem liegt zwischen Jerusalem und Hebron'

Dieser Satz enthält drei singuläre Terme:

‚Betlehem', ‚Jerusalem', und ‚Hebron'.

Aus disesm Satz lassen sich u. a. die folgenden Prädikate gewinnen:

___ liegt zwischen Jerusalem und Hebron.
___ liegt zwischen ___ und Hebron.
___ liegt zwischen ___ und ___.

Ein deutsches Prädikat mit nur einer Leerstelle ist ein **einstelliges** Prädikat von D. Ein Prädikat mit mehr als einer Leerstelle (z.B. zwei) ist ein **mehrstelliges** Prädikat. Im Allgemeinen gilt: Wenn *n* eine positive ganze Zahl ist, ist ein Prädikat mit *n* Leerstellen ein ***n*-stelliges** Prädikat von D.

8.3.2 Bildung von Sätzen (D)

Ein Satz kann aus einem Prädikat erzeugt werden, indem die Leerstellen des Prädikats mit singulären Termen gefüllt werden. Jeder beliebige singuläre Term kann in jede beliebige Leerstelle eingesetzt werden und derselbe singuläre Term kann in mehr als eine Leerstelle eingesetzt werden. Beispiele: Aus dem zweistelligen Prädikat ‚___ lebt in ___’ und den singulären Termen ‚Anne’, ‚Tübingen’ und ‚die leere Menge’ lassen sich u. a. die folgenden Sätze bilden.

> Anne lebt in Tübingen.
> Anne lebt in Anne.
> Die leere Menge lebt in Tübingen.

Nach den Regeln der deutschen Grammatik, sind diese Sätze Sätze der deutschen Sprache.

8.3.3 Wahrheit eines Satzes (D)

Wenn ein Satz, der aus einem *n*-stelligen Prädikat besteht, wobei die Leerstellen mit *n* singulären Termen gefüllt sind, wahr ist, sagen wir, dass dieses Prädikat von den *n* Dingen, die von diesen *n* singulären Termen bezeichnet werden erfüllt wird. (Wir werden den Begriff der Wahrheit im Kapitel zur formalen Semantik präzisieren. Hier begnügen wir uns mit einführenden Bemerkungen.)

Das Prädikat ‚ ___ lebt in ___’ zum Beispiel wird von dem Paar, das aus Anne und Tübingen besteht erfüllt, aber von dem Paar, das aus Tübingen und Anne besteht nicht. Paare, Tripel, usw. – d.h. *n*-Tupel im Allgemeinen – haben im Gegensatz zu Mengen eine in sie „eingebaute“ Ordnung. So sind die geordneten Paare <Anne, Tübingen> und <Tübingen, Anne> verschieden, die Mengen {Anne, Tübingen} und {Tübingen, Anne} aber identisch. (Siehe dazu Kapitel 2.)

Man könnte einwenden, dass einige der oben gebrachten grammatisch korrekt gebildeten Beispielsätze (siehe 8.3.2) sinnlos sind, z.B. der letzte. Es gibt traditionell zwei Strategien, mit solchen Sätzen umzugehen:

- Strategie 1: Solche Sätze können keinen der beiden Wahrheitswerte haben und sind somit weder wahr noch falsch. (Konsequenz: Aufgabe des Bivalenzprinzips.)
- Strategie 2: Solche Sätze sind sinnvoll aber falsch.

Hier wird Strategie 2 befolgt.

8.3.4 Individuenvariablen

Die Leerstellen in den Prädikaten, in die singuläre Terme eingesetzt werden können, lassen sich durch Kleinbuchstaben ‚w’, ‚x’, ‚y’ und ‚z’ (falls nötig mit numerischen Indices versehen) ersetzen. Diese Kleinbuchstaben zeigen dann die Leerstellen in diesen Prädikaten an. Unter Zugrundelegung dieser Konvention lässt sich das oben diskutierte 3-stellige Prädikat ‚__ liegt zwischen __ und __’ wie folgt darstellen:

x liegt zwischen y und z
(oder ‚w liegt zwischen x und y',
oder als ‚z liegt zwischen x und y' u.s.w.).

Wichtig: Es müssen verschiedene Variablen benutzt werden, um die verschiedenen Vorkommen von singulären Termen zu ersetzen; welche Variablen aber benutzt werden, ist gleichgültig.

8.3.5 Bildung zusammengesetzter Sätze (D)

Mit einem Bestand von singulären Termen, von Prädikaten und mit den Satzkonnektiven ‚und', ‚oder', ‚wenn . . . dann', ‚genau dann, wenn' und ‚nicht' kann eine große Vielfalt deutscher Sätze erzeugt werden.

Beispiel: Aus den obigen Satzkonnektiven, den singulären Termen ‚Heiko', ‚Sandy', ‚Richie' und ‚Mark' und den Prädikaten ‚x ist ausgeglichen', ‚x mag y' und ‚x ist älter als y' lassen sich die folgenden deutschen Sätze bilden:

Mark ist ausgeglichen.
Sandy ist ausgeglichen.
Mark ist älter als Sandy und Sandy ist älter als Heiko.
Sandy mag Heiko und Mark mag Richie.
Wenn Richie Heiko mag, dann ist Richie älter als Heiko.
Wenn Mark ausgeglichen ist, dann ist Richie nicht ausgeglichen.

8.4 Quantitätsterme im Deutschen

Mit singulären Termen, Prädikaten und Satzkonnektiven können Sätze wie die folgenden nicht gebildet werden:

Jeder ist ausgeglichen.
Keiner ist ausgeglichen.
Jemand ist ausgeglichen.
Jemand ist nicht ausgeglichen.
Mark mag jeden.
Mark mag nicht jeden.
Jemand mag Sandy.
Niemand ist größer als sie oder er selbst.
Alle Menschen sind sterblich.
Etwas ist aus Materie.

Was uns bisher fehlt ist eine Erklärung solcher „Quantitätsterme“ wie:

- ‚jeder’,
- ‚alle’
- ‚jeder einzelne’,
- ‚einige’,
- ‚etwas’ oder
- ‚keiner’.

Diese und andere Quantitätsterme dienen dazu, anzuzeigen **welcher Umfang** von Dingen, die zur Diskussion stehen, in einer bestimmten Art und Weise beschaffen ist. Sie sind keine singulären Terme und beziehen sich nicht auf ein einzelnes Ding.

Der Satz ‚Jeder ist ausgeglichen’ ist wahr genau dann, wenn ‚x ist ausgeglichen’ von jeder Person wahr ist und der Satz ‚Jemand ist nicht ausgeglichen’ ist wahr genau dann, wenn es mindestens eine Person gibt von der ‚x ist ausgeglichen’ nicht wahr ist. (Mehr und Genaueres zur Semantik von PL in Kapitel 11.)

8.5 Eine erste Einführung in die Syntax und Semantik der Sprache PL sowie in die Symbolisierung nichtquantifizierter Sätze

Um eine ausdrucksstärkere formale Sprache zu erhalten als AL wollen wir nun – in einer eher intuitiven Weise – formale Entsprechungen zu den singulären Termen, Prädikaten, und Quantitätstermen des Deutschen einführen. Dabei werden wir fürs erste nur die Konnektive von AL in PL übernehmen. (Eine formale Präsentation der Syntax von PL wird in Kapitel 9 geliefert.)

<u>Satzkonnektive von PL:</u>

Die fünf wahrheitsfunktionalen Konnektive ‚$\wedge$’, ‚$\vee$’, ‚$\rightarrow$’, ‚$\leftrightarrow$’ und ‚$\neg$’. Sie dienen der Symbolisierung deutscher Konnektive, wenn diese wahrheitsfunktional verwendet werden.

<u>Individuenkonstanten von PL:</u>

Als Entsprechungen für die (bezeichnenden) singulären Terme des Deutschen enthält PL Individuenkonstanten: römische Kleinbuchstaben <u>‚a’ bis ‚v’</u>, mit oder ohne numerische Indices (abzählbar unendlich viele).[2]

[2] Individuenkonstanten von PL sind ausschließlich für die Symbolisierung von Eigennamen reserviert. Singuläre Kennzeichnungen werden mit einer Symbolabfolge formalisiert, die wir erläutern werden nachdem wir das Identitätsprädikat eingeführt haben. Bis dahin wollen wir (beide Augen zudrücken und) Kennzeichnungen ebenfalls durch Individuenkonstanten symbolisieren.

Prädikate und Variablen von PL:

Die Prädikate von PL (auch ‚Prädikatbuchstaben' genannt): römische Großbuchstaben ‚A' bis ‚Z', mit oder ohne numerische Indices, gefolgt von einer oder von mehreren Strichen (abzählbar unendlich viele).

Die Prädikate von PL gehen, wie die Prädikate des Deutschen, mit Leerstellen einher, wobei die Zahl der Leerstellen durch die Zahl der Striche angezeigt wird. Somit ist ‚F′' ein einstelliges Prädikat von PL, ‚G′′' ein zweistelliges und so weiter. Eine alternative Schreibweise verwendet hochgestellte Ziffern anstelle von Strichen. So kann nach einer solchen Notation ‚G^2' statt ‚G′′' geschrieben werden.

Prädikate von PL lassen sich in der Praxis auch ohne die Striche bzw. Superskripte angegeben. Die Tatsache, dass das fragliche Prädikat ein *n*-stelliges Prädikat ist wird dann angezeigt, indem eine Anzahl von *n* Buchstaben ‚w' bis ‚z' (wenn notwendig mit Indices) hinter den Prädikatbuchstaben geschrieben werden (abzählbar unendlich viele).

Hierzu ein Beispiel: Das Prädikat in ‚Fx' (statt: F′′ oder F^2) ist ein einstelliges Prädikat und die Prädikate in ‚Gxy' oder ‚Hxx' sind zweistellige Prädikate (statt G′′ oder G^2 bzw. statt H′′ oder H^2).

Die Buchstaben ‚w' bis ‚z' (mit und ohne Indices), werden Variablen von PL genannt.

Eine Bemerkung zum Gebrauch der Prädikate und der Individuenkonstanten von PL:

In PL kann man z.B. das zweistellige Prädikat ‚Lxy' benutzen, um in verschiedenen Situationen eine Vielzahl deutscher zweistelliger Prädikate zu symbolisieren, z.B. ‚x ***l***iebt y', ‚x ***l***acht über y', ‚x ***l***ästert über y' usw. Natürlich kann auch ‚Fxy' benutzt werden um diese deutschen Prädikate zu symbolisieren. Entsprechend kann die Individuenkonstante ‚a' benutzt werden, um ***A***nja, ***A***ldo oder die Zahl 9 zu bezeichnen.

Individuenbereich:

Die Menge der Dinge, über die bei einem bestimmten Kontext gesprochen wird, nennen wir den **Individuenbereich** für diesen Kontext und verwenden die Abkürzung ‚UD' (*universe of discourse*) bei der Spezifikation eines Individuenbereichs. UD ist *per definitionem* eine nicht-leere Menge. (Warum macht es wenig Sinn, anzunehmen, dass UD = ∅?)

Symbolisierungsschlüssel:

Zum Zweck der Angabe der natürlichsprachlichen Bedeutung der Individuenkonstanten und der Prädikate von PL sowie zwecks der Angabe des Individuenbereichs für die Quantoren verwenden wir **Symbolisierungsschlüssel**. Hierzu ein Beispiel:

UD	:	Die Teilnehmer am Sprachkurs „Akkadisch II“.
Mxy	:	x mag y
Lx	:	x ist lässig
Gxy	:	x ist größer als y

h	:	Heiko
m	:	Mark
r	:	Rut
s	:	Sandy

Im Deutschen können Sätze erzeugt werden, indem die Leerstellen mit singulären Termen ausgefüllt werden. In einer ähnlichen Weise können in PL Sätze aus Prädikaten erzeugt werden, indem die Leerstellen mit Individuenkonstanten (durch die Ersetzung der Variablen, die die Leerstellen markieren) ausgefüllt werden. [3]

Einfache Symbolisierungen in PL :

Beispiele:

Satz von PL		Satz (D)
Msh	symbolisiert	‚Sandy mag Heiko'
Mhs	symbolisiert	‚Heiko mag Sandy'
Lm	symbolisiert	‚Mark ist lässig'

Entsprechend lassen sich die deutschen Sätze

Sandy ist lässig.
Mark ist größer als Sandy und Sandy ist größer als Heiko.
Sandy mag Heiko und Mark mag Rut.
Wenn Rut Heiko mag, dann ist Rut größer als Heiko.
Wenn Mark lässig ist, dann ist Rut nicht lässig.

in PL wie folgt symbolisieren:

Ls
$Gms \wedge Gsh$
$Msh \wedge Mmr$
$Mrh \rightarrow Grh$
$Lm \rightarrow \neg Lr$

[3] Die Schreibweise mit Variablen hat den Nachteil, dass sie mehr Information vermittelt als nötig. So sagt die Schreibweise mit Strichen und Superskripten nur etwas über die Stelligkeit aus. Die Schreibweise mit Variablen hingegen scheint auch Informationen über die logischen Eigenschaften der zwei- und mehrstelligen Prädikate zu vermitteln. So könnte im obigen Symbolisierungsschlüssel die Schreibweise ‚Mxy' (bzw. Mxy: x mag y) anders als ‚M^2' (bzw. M2: ... mag ...) nahelegen, anzunehmen, dass sich ein Ding nicht selbst mögen kann. Das wäre aber falsch, da Mögen eine reflexive Relation ist. In Abschnitt 11.1.1 werden wir noch einmal auf Symbolisierungsschlüssel eingehen.

8.6 Eine erste Einführung von Quantoren

8.6.1 Symbolisierung von Quantitätstermen bei eingeschränktem Individuenbereich

Wir können einen deutschen Satz, der Quantitätsterme enthält symbolisieren, indem wir nur die Mittel von PL benutzen, die uns bisher zugänglich sind. Das geht aber nur dann, wenn der Individuenbereich – wie im obigen Symbolisierungsschlüssel – sehr klein ist.

UD: Teilnehmer am besagten Sprachkurs (d. h. Mark, Sandy, Rut und Heiko).

Satz (D): ‚Jeder ist lässig'
Symbolisierung (PL): $(Ls \wedge Lh) \wedge (Lr \wedge Lm)$

Satz (D): ‚Mark mag jemanden'
Symbolisierung (PL): $(Mms \vee Mmh) \vee (Mmr \vee Mmm)$

Satz (D) : 'Mark mag jeden'
Symbolisierung (PL): $(Mms \wedge Mmh) \wedge (Mmr \wedge Mmm)$

8.6.2 Quantoren: Sätze mit einem einzigen Quantor

Symbolisierungen von Quantitätsaussagen mit Hilfe von Konjunktionen und/oder Disjunktionen von Sätzen sind unbequem oder funktionieren prinzipiell nicht, wenn solche Sätze wie ‚Mark mag jeden' symbolisiert werden sollen und die Anzahl der Dinge, die durch ‚jeder' erfasst wird:

- groß ist (z.B. alle Personen, mit denen Mark in seinem Leben gesprochen hat)
- abzählbar unendlich groß ist (positive ganze Zahlen).
- überabzählbar unendlich groß ist (reelle Zahlen).

(Es gibt also mehr reelle Zahlen als Individuenkonstanten, von denen es ja nur abzählbar unendlich viele gibt.) Nach der obigen Strategie würden wir einen unendlich langen Satz benötigen. Aber wir wollen, dass die Sätze von AL und PL nur endlich lang sind (da wir nur endlich lange Sätze bilden können). Somit brauchen wir Entsprechungen für die Quantitätsterme des Deutschen in PL: Quantoren.

<u>Quantorensymbole:</u>

Es gibt zwei **Quantorensymbole** <u>‚$\forall$' und ‚$\exists$'</u>. Die Variablen von PL sind die Buchstaben ‚w' bis ‚z', mit oder ohne Indices.

<u>Quantoren:</u>

Ein **Quantor** von PL besteht aus einem Quantorensymbol gefolgt von einer Variable, wobei beide – gemäß der hier befolgten Konvention – in Klammern einzuschließen sind. Somit sind <u>‚$(\forall x)$' und ‚$(\exists y)$'</u> Quantoren.

Wir können iterierte Konjunktionen und Disjunktionen (siehe die Beispiele in 8.6.1) vermeiden und bei Zugrundelegung des obigen stark eingeschränkten UD folgende Symbolisierung vornehmen:

Satz (D):	Mark mag jeden
Symbolisierung (PL):	$(\forall x)$ Mmx

Hier haben wir ein Prädikat mit einer Leerstelle, die durch eine Individuenkonstante ausgefüllt ist. Dem Prädikat ist ein Quantor vorangestellt, der aus derselben Variable gebildet ist, die die zweite Leerstelle ausfüllt.

Der Allquantor:

Quantoren die mit ‚$\forall$' gebildet werden, werden ‚Allquantoren' genannt und werden benutzt, um zu behaupten, dass (ausnahmslos) alle Dinge über die gesprochen wird (d. h. alle Dinge im UD), von der Art sind, die durch den Ausdruck spezifiziert wird, der auf den Quantor folgt.

Werte von Variablen:

Die Dinge über die gesprochen wird, die Elemente des aktuellen Individuenbereichs, werden ‚**Werte der Variablen**' genannt.

‚$(\forall x)$ Mmx' drückt aus, dass jedes Ding über das gesprochen wird, d. h. in unserem Beispiel, jede Person in Marks Sprachkurs (jeder Wert der Variable ‚x') derart ist, dass es ‚Mmx' erfüllt (d. h. jedes Ding im UD ist so beschaffen, dass Mark es mag).

Der Existenzqunator:

Um den Satz ‚Mark mag jemanden' zu symbolisieren, wobei wir immer noch ausschließlich über die Personen in Marks Sprachkurs sprechen, können wir einen **Existenzquantor** benutzen, d. h. einen Quantor, der mit ‚$\exists$' gebildet wird.

$(\exists x)$Mmx

besagt, dass es mindestens ein x gibt (d. h. mindestens einen Wert der Variable ‚x'), das so geartet ist, dass Mark dieses x mag. Äquivalente Lesarten (für das obige UD, d.h. die Teilnehmer an Akkadisch II) sind:

- Es gibt mindestens eine Person, die Mark mag
- Mark mag jemanden
- Mark mag einige Personen (Wichtig: ‚einige' wird hier immer im Sinne von ‚mindestens ein' benutzt).

Variablen von PL

Mit Hilfe der Variablen von PL lassen sich solche deutschen Pronomina und solche Ausdrücke wie z.B. ‚ein', ‚etwas', ‚jemand', ‚alles' ausdrücken.

Satz 1 (D):	Etwas ist blau.
Paraphrase (D):	Mindestens eines der Dinge, über die diskutiert wird ist so geartet, dass es blau ist.
Symbolisierung (PL):	$(\exists x)Bx$
Satz 2 (D):	Alles ist blau.
Paraphrase (D):	Jedes der Dinge (bzw. alle Dinge), über die diskutiert wird ist (sind) so geartet, dass es (sie) blau ist (sind).
Symbolisierung (PL):	$(\forall x)Bx$

Beobachtung: In beiden Symbolisierungen kommt die Variable ‚x' zweimal vor; das erste Vorkommnis entspricht ‚Ding' in der deutschen Paraphrase, das zweite ‚es'.

Symbolisierungen von Sätzen mit einem einzigen Quantor

UD	:	Die Teilnehmer am besagten Sprachkurs
Mxy	:	x mag y
Lx	:	x ist lässig
Gxy	:	x ist größer als y
h	:	Heiko
m	:	Mark
r	:	Rut
s	:	Sandy

Die zu symbolisierenden Sätze sind:

Jeder ist lässig
Niemand mag Mark
Mark mag jeden
Mark mag nicht jeden
Mark mag niemanden
Jemand mag Sandy
Niemand ist größer als sie oder er selbst

Sie können in PL wie folgt symbolisiert werden:

$(\forall x)Lx$
$\neg(\exists x)Mxm$
$(\forall x)Mmx$
$\neg(\forall x)Mmx$
$\neg(\exists x)Mmx$
$(\exists x)Mxs$
$\neg(\exists x)Gxx$

Hinweise zur Symbolisierung

a) In jedem der obigen Fälle, kann jedes Vorkommnis von ‚x' mit einer anderen Variable (z.B. ‚w') ersetzt werden.

b) Entsprechend kann in jedem dieser Fälle, jedes Vorkommnis des Prädikatbuchstabens ‚L' durch einen anderen Prädikatbuchstaben ersetzt werden (z.B. ‚K').

c) Die Individuenvariablen, die in den Symbolisierungsschlüsseln für die Spezifikation von Prädikaten verwendet werden müssen bei Symbolisierungen, die auf diesen Schlüsseln basieren, nicht benutzt werden (so können wir auch bei Zugrundelegung des obigen Symbolisierungsschlüssels ‚Jeder ist lässig' als ‚$(\forall y)Ly$' symbolisieren.)

d) Bei der Symbolisierung ist die Bedeutung der natürlichsprachlichen Sätze zu beachten. Der Unterschied zwischen (1) ‚Mark mag nicht jeden' und (2) ‚Mark mag niemanden' z.B. ist wahrzunehmen. Er wird ganz klar durch die folgende Symbolisierung in PL aufgezeigt: (1) $\neg(\forall x)Mmx$; (2) $\neg(\exists x)Mmx$.

Symbolisierungen von Sätzen mit mehreren Quantoren

Symbolisierungsschlüssel:

UD: wie oben;
plus
Ex : x ist ehrgeizig.

Sätze (D):

1) Jeder ist lässig oder niemand ist es.
2) Wenn Rut lässig ist, dann ist es jeder.
3) Rut mag Sandy genau dann, wenn es jeder tut.
4) Heiko mag jeden, aber Sandy nicht.
5) Heiko mag jeden und Sandy mag niemanden.
6) Nicht jeder ist lässig, aber jeder ist ehrgeizig.
7) Wenn jemand ehrgeizig ist, dann ist es Mark.
8) Jeder ist ehrgeizig genau dann, wenn niemand lässig ist.

Symbolisierungen (PL):

1) $(\forall y)Ly \vee \neg(\exists w)Lw$
2) $Lr \rightarrow (\forall w)Lw$
3) $Mrs \leftrightarrow (\forall z)Mzs$
4) $(\forall y)Mhy \wedge \neg(\forall x)Msx$
5) $(\forall y)Mhy \wedge \neg(\exists x)Msx$
6) $\neg(\forall z)Lz \wedge (\forall y)Ey$
7) $(\exists w)Ew \rightarrow Em$
8) $(\forall w)Ew \leftrightarrow \neg(\exists w)Lw$

Interdefinierbarkeit der Quantoren

Man kann mit nur einem Quantor auskommen. $(\exists x)A$ lässt sich als $\neg(\forall x)\neg A$ definieren. Wird der Existenzquantor als Grundausdruck angenommen, lässt sich $(\forall x)A$ entsprechend als $\neg(\exists x)\neg A$ definieren. Es ist aber praktisch, beide Quantoren zur Verfügung zu haben.