9. PRÄDIKATENLOGIK:

SYNTAX

9.1 Das Vokabular von PL

Satzbuchstaben von PL:

Die römischen Großbuchstaben ‚A' bis ‚Z', mit oder ohne Indices (positive ganze Zahlen). (Sie sind nichts anderes als die Satzbuchstaben von AL.)

$A, B, C, \ldots, Z, A_1, B_1, C_1, \ldots, Z_1, \ldots$

Prädikate (bzw. Prädikatbuchstaben) von PL:

Die römischen Großbuchstaben ‚A' bis ‚Z' mit oder ohne Indices (positive ganze Zahlen) gefolgt von einem oder von mehreren Strichen. (Ein *n*-stelliges Prädikat wird durch die Gegenwart von genau *n* Strichen angezeigt. Ist ein Prädikat z. B. mit zwei Strichen versehen, dann ist es 2-stellig.)

$A', B', C', \ldots, Z', A_1', B_1', C_1', \ldots, Z_1', \ldots$

(Alternativ kann man die „Stelligkeit" eines Prädikats anzeigen, indem man es mit der Ziffer für die Anzahl seiner Argumentstellen superskribiert. So können wir statt F'' auch F^2 schreiben.)

Individuenterme von PL:

Individuenkonstanten von PL: Die römischen Kleinbuchstaben ‚a' bis ‚v' mit oder ohne Indices (positive ganze Zahlen).

$a, b, c, \ldots, v, a_1, b_1, c_1, \ldots, v_1, \ldots$

Individuenvariablen von PL: Die römischen Kleinbuchstaben ‚w' bis ‚z' mit oder ohne Indices (positive ganze Zahlen).

$w, x, y, z, w_1, x_1, y_1, z_1, \ldots$

Wahrheitsfunktionale Konnektive: $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$

Quantorensymbole: $\forall \; \exists$

Klammern: ( ) [ ]

Die Sprache PL erweitert die Sprache AL. Sie enthält ja die Satzbuchstaben, die Konnektive und Klammern. PL kann deshalb alles ausdrücken, was in AL ausgedrückt werden kann

Konvention zur Notation:

Die Striche, die die Stelligkeit der Prädikate von PL angeben, können weggelassen werden, wenn aus der Anzahl der angehängten Individuenterme ihre Stelligkeit hervorgeht.

Auf die Verwendung von Satzbuchstaben wird bei der Symbolisierung weitestgehend verzichtet, da es bei der Symbolisierung in PL auf die in dieser Sprache darstellbare subsententielle Struktur der zu formalisierenden Sätze ankommt.

9.2 Ausdruck von PL

Definition 9.2 (Ausdruck von PL):

Ein **Ausdruck von PL** ist eine Abfolge von Elementen des Vokabulars von PL (wobei die Elemente nicht notwendigerweise verschieden sein müssen).

Beispiele:

$)(A \rightarrow xB()$

$(C \rightarrow Dab))$

$(\exists x)Rxx$

} Ausdrücke von PL

$\{ABA\}$

$A \rightarrow \Diamond A$

$A \equiv Bab$

$(\forall \$)(Cab)$

} keine Ausdrücke von PL, da die Symbole ‚{’, ‚}’, ‚◊’, ‚≡’ und ‚$’ keine Elemente des Vokabulars von PL sind.

9.3 Metavariablen von PL

Metavariablen für Ausdrücke von PL:	A, B, C
Metavariable für Individuenkonstanten von PL:	a, b, c
Metavariable für Individuenvariablen von PL:	x, y, z

9.4 Quantoren von PL

Definition 9.4 (Quantor von PL):

Ein Quantor von PL ist ein Ausdruck von PL der Form (∀x) oder (∃x).
Ein Ausdruck der ersten Form ist ein **Allquantor**, ein Ausdruck der zweiten Form ein **Existenzquantor**.

Quantoren enthalten Variablen: ‚(∀x)' und ‚(∃x)' enthalten die Variable ‚x' (und sind „x-Quantoren"); ‚(∀y)', und ‚(∃y)' enthalten die Variable ‚y' („y-Quantoren").

9.5 Atomare Formel von PL

Definition 9.5 (atomare Formel von PL):

Eine **atomare Formel von PL** ist ein Ausdruck von PL, der entweder ein Satzbuchstabe von PL ist, oder ein n-stelliges Prädikat von PL gefolgt von n Inividuentermen von PL.

Beispiele: F, Fx, Ryb, Rab

9.6 Formel von PL

Definition 9.6 (Formel von PL):

1. Jede atomare Formel von PL ist eine Formel von PL.
2. Wenn A eine Formel von PL ist, dann ist es auch $\neg A$.
3. Wenn A und B Formeln von PL sind, dann sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ und $(A \leftrightarrow B)$ Formeln von PL.
4. Wenn A eine Formel von PL ist, die mindestens ein Vorkommnis von x enthält und keinen x-Quantor, dann sind $(\forall x)A$ und $(\exists x)A$ Formeln von PL.
5. Ein Ausdruck ist keine Formel von PL, wenn er nicht durch wiederholte Anwendung der Klauseln 1 bis 4 gebildet werden kann.

Wie am Ende des letzten Kapitels bereits gesagt wurde, lässt sich $(\exists x)A$ als $\neg(\forall x)\neg A$ definieren, wenn der Allquantor als Grundausdruck angenommen wird. Wird der Existenzquantor als Grundausdruck angenommen, lässt sich $(\forall x)A$ entsprechend als $\neg(\exists x)\neg A$ definieren.

9.7 Logischer Operator von PL

Definition 9.7 (logischer Operator von PL):

Ein **logischer Operator von PL** ist ein Ausdruck von PL, der entweder ein Quantor oder ein wahrheitsfunktionales Konnektiv ist.

9.8 Ausdrücke von PL und Formeln von PL

Im folgenden wollen wir die Unterscheidung zwischen Ausdrücken von PL und Formeln von PL illustrieren, indem wir untersuchen, ob es sich bei einer Auswahl von Ausdrücken von PL um Formeln von PL handelt oder nicht.

1) Fax

Dieser Ausdruck besteht aus einem zweistelligen Prädikat gefolgt von zwei Inividuentermen, wobei der erste eine Individuenkonstante ist und der zweite eine Individuenvariable ist. Somit ist er eine atomare Formel von PL. Aufgrund von Klausel 9.6.1 ist dieser Ausdruck eine Formel von PL.

2) Rab $\wedge$ $(\forall$z)(Fz $\leftrightarrow$ Gz)

‚Rab $\wedge$ $(\forall$z)(Fz $\leftrightarrow$ Gz)' ist aufgrund von Klausel 9.6.3 eine Formel von PL, wenn ‚Rab' und ‚$(\forall$z)(Fz $\leftrightarrow$ Gz)' Formeln von PL sind.

Der erste dieser Ausdrücke ist eine atomare Formel, ein zweistelliges Prädikat gefolgt von zwei Individuentermen (beides Konstanten), und somit eine Formel von PL (aufgrund von Klausel 9.6.1).

Der zweite Ausdruck ist aufgrund von Klausel 9.6.4 eine Formel von PL, wenn ‚(Fz $\leftrightarrow$ Gz)' eine Formel ist, die mindestens ein Vorkommnis von ‚z' und keinen z-Quantor enthält. Diese Bedingungen sind erfüllt. Da ‚Fz' und ‚Gz' atomare Formeln von PL sind und somit Formeln von PL, ist ‚(Fz $\leftrightarrow$ Gz)' aufgrund von Klausel 9.6.3 eine Formel von PL. Somit ist der ganze Ausdruck eine Formel von PL.

3) Raz $\wedge$ $\neg(\forall$z)(Fz $\leftrightarrow$ Gz)

Dieser Ausdruck von PL ist eine Formel von PL. Es ist eine Abwandlung von (2): ‚Raz' an Stelle von ‚Rab'; rechtes Konjunkt negiert.

4) $(\forall y)(Raz \wedge \neg(\forall z)(Fz \leftrightarrow Gz))$

Dieser Ausdruck ist keine Formel. ‚$(Raz \wedge \neg(\forall z)(Fz \leftrightarrow Gz)$' ist eine Formel (siehe 2). Da sie aber kein Vorkommnis der Variable ‚y' enthält, produziert eine Voranstellung eines y-Quantors vor diesen Ausdruck einen Ausdruck, der keine Formel von PL ist.

9.9 Teilformel und Hauptoperator

Die Bestimmung der Beziehung zwischen Formeln von PL und Sätzen von PL ist unser nächstes Ziel. Das erreichen dieses Zieles (siehe Abschnitt 9.13) macht die Einführung einer Reihe von Begriffen erforderlich. Zunächst wollen wir die Begriffe **Teilformel** und **Hauptoperator** einführen. Die Charakterisierung dieser Begriffe geht aus den folgenden Punkten hervor:

1. Wenn *A* eine atomare Formel von PL ist, dann enthält *A* keinen logischen Operator und somit keinen Hauptoperator; *A* ist dann die einzige Teilformel von *A*.

2. Wenn *A* eine Formel von PL ist mit der Form $\neg B$, dann ist das Negationszeichen $\neg$, das *B* vorausgeht, der Hauptoperator von *A* und *B* ist die unmittelbare Teilformel von *A*.

3. Wenn *A* eine Formel von PL ist mit der Form $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, $(B \rightarrow C)$ oder $(B \leftrightarrow C)$, dann ist das zweistellige Konnektiv zwischen *B* und *C* der Hauptoperator von *A*; *B* und *C* sind dann die unmittelbaren Teilformeln von *A*.

4. Wenn *A* eine Formel von PL mit der Form $(\forall x)B$ oder $(\exists x)B$ ist, dann ist der Quantor, der vor *B* erscheint, der Hauptoperator von *A*; *B* ist dann die unmittelbare Teilformel von *A*.

5. Wenn *A* eine Formel von PL ist, dann ist jede Teilformel (ob unmittelbar oder nicht) einer Teilformel von *A* eine Teilformel von *A*; *A* ist eine Teilformel von sich selbst.

9.10 Klassifikation der Formeln von PL

Die Formeln von PL lassen sich nach ihren Hauptoperatoren klassifizieren. (Diese Klassifikation ist für die Bestimmung des Verhältnisses zwischen Formeln von PL und Sätzen von PL hilfreich. Vgl. die Klassifikation von Sätzen von PL in 9.14.)

- **atomar**e Formeln von PL haben keinen Hauptoperator.

- **quantifiziert**e Formeln von PL haben einen Quantor als ihren Hauptoperator.

- **wahrheitsfunktional**e Zusammensetzungen von PL haben ein wahrheitsfunktionales Konnektiv als Hauptoperator.

Beispiele: Die vier Ausdrücke von PL aus Abschnitt 9.8.

Formel	Teilformel	H.operator	Typ
1)			
Fax	Fax	-	atomar
2)			
Rab ∧ (∀z)(Fz ↔ Gz)	Rab ∧ (∀z)(Fz ↔ Gz)	∧	wahrheitsf.
	Rab	-	atomar
	(∀z)(Fz ↔ Gz)	(∀z)	quantifiziert
	(Fz ↔ Gz)	↔	wahrheitsf.
	Fz	-	atomar
	Gz	-	atomar
3)			
Raz ∧ ¬(∀z)(Fz ↔ Gz)	Raz ∧ ¬(∀z)(Fz ↔ Gz)	∧	wahrheitsf.
	Raz	-	atomar
	¬(∀z) (Fz ↔ Gz)	¬	wahrheitsf.
	(∀z) (Fz ↔ Gz)	(∀z)	quantifiziert
	(Fz ↔ Gz)	↔	wahrheitsf.
	Fz	-	atomar
	Gz	-	atomar

4)
Der vierte Ausdruck,

(∀y)(Raz ∧ ¬(∀z)(Fz ↔ Gz))

ist keine Formel von PL. Er ist nicht in Übereinstimmung mit 9.6.4 gebildet. (Warum?) Aus diesem Grund können die Begriffe des Hauptoperators und der Teilformel nicht auf ihn angewendet werden.

9.10 Der Bereich eines Quantors

Quantoren dienen dazu, Variablen zu interpretieren. Der Bereich eines Quantors (*scope of a quantifier*) ist sein Interpretationsbereich.

> Definition 9.10 (Bereich eines Quantors):
>
> Der **Bereich eines Quantors** in einer Formel *A* von PL ist die Teilformel *B* von *A*, deren Hauptoperator der Quantor ist.

Der Bereich eines Quantors ist somit alles, was zu einer quantifizierten Formel dazugehört: der Quantor selbst und die Formel, der er nach Klausel 9.6.4 angehängt wird.[1]

Beispiel 1: (∀x)Rxy
Im Bereich des Quantors ‚(∀x)' befinden sich ‚(∀x)' und ‚Rxy', sein Bereich ist somit ‚(∀x)Rxy'.

Beispiel 2: Fx → (∀y)Rxy
Im Bereich des Quantors ‚(∀y)' befinden sich ‚(∀y)' und ‚Rxy'. Der Bereich dieses Quantors ist somit ‚(∀y)Rxy'. ‚Fx' ist nicht im Bereich des Quantors. Das erste Vorkommnis von ‚x', das in ‚Fx', fällt nicht in den Bereich von ‚(∀y)', da es sich nicht in der Teilformel ‚(∀y)Rxy' befindet.

Beispiel 3: (∀z)Fz → ¬Gz
Der Bereich des Quantors ‚(∀z)' ist ‚(∀z)Fz'.

(Der Bereich eines Quantors darf nicht mit dem Individuenbereich UD verwechselt werden.)

9.11 Gebundene und freie Variablen

Definition 9.11.1 (gebundene Variable):

Ein Vorkommnis einer Variable *x* in einer Formel *A* von PL ist **gebunden** genau dann, wenn sich dieses Vorkommnis innerhalb des Bereich eines *x*-Quantors befindet.

Definition 9.11.2 (freie Variable):

Ein Vorkommnis einer Variable *x* in einer Formel *A* von PL ist **frei** genau dann, wenn es nicht gebunden ist.

Beispiel: In der Formel ‚(∀z)Rzyz' sind die Vorkommnisse von ‚z' gebunden, das Vorkommnis von ‚y' aber nicht. Letzteres kommt in der Formel also frei vor.

9.12 Satz von PL und offener Satz von PL

Nun sind wir in der Lage, die Begriffe des **Satzes von PL** und des **offenen Satzes von PL** formal einzuführen:

[1] Diese Definition des Bereichs eines Quantors weicht von der Definition ab, die Seebohm (1991) gibt und entspricht der Definition von Bergmann et al. (1997).

Definition 9.12.1 (Satz von PL):

Eine Formel *A* von PL ist ein **Satz von PL** genau dann, wenn kein Vorkommnis einer Variable in *A* frei ist.

Beispiele: (∀x)Fx, Rab, (∃z)Fzc

Definition 9.12.2 (offener Satz von PL):

Eine Formel *A* von PL ist ein **offener Satz von PL** genau dann, wenn sie kein Satz von PL ist.

Beispiele: Fx, Rxb, (∃z)Fzx

9.13 Formeln von PL und Sätze von PL

Im folgenden wollen wir nun die Unterscheidung zwischen Formeln von PL und Sätzen von PL illustrieren, indem wir untersuchen, ob es sich bei einer Auswahl von Formeln von PL um Sätze von PL handelt oder nicht.

1) Fax

‚Fax' ist kein Satz von PL, da er ein freies Vorkommnis von ‚x' enthält. Diese Formel kann zu einem Satz gemacht werden, indem ihr ein x-Quantor vorangestellt wird.

2) Rab ∧ (∀z)(Fz ↔ Gz)

Diese Formel ist ein Satz, da die einzige Variable, die sie enthält, ‚z' ist und da alle Vorkommnisse von ‚z' in den Bereich von ‚(∀z)' fallen. Formeln, die wie z.B. ‚Rabc' oder ‚Hab' keine Variablen enthalten (also auch keine freien Variablen), sind atomare Sätze von PL. (Es sind ja Individuenvariablen, nicht Individuenkonstanten, die durch Quantoren interpretiert werden müssen.)

3) Raz ∧ ¬(∀z)(Fz ↔ Gz)

Diese Formel ist kein Satz von PL, da sie eine freie Variable enthält.

4) (∀y)(Raz ∧ ¬(∀z)(Fz ↔ Gz))

Das ist keine Formel und somit auch kein Satz.

9.14 Klassifikation der Sätze von PL

Da Sätze von PL Formeln von PL sind, können wir sagen, dass Sätze von PL:

- quantifiziert,
- wahrheitsfunktional oder
- atomar

sind.

9.15 Einsetzungsinstanz eines quantifizierten Satzes

Wir werden einen weiteren syntaktischen Begriff benötigen, nämlich den der **Einsetzungsinstanz** (*substitution instance*) eines quantifizierten Satzes.

Um diesen Begriff zu definieren schreiben wir $A(a/x)$ für eine Formel von PL, die wie A ist, nur mit dem Unterschied, dass sie die Individuenkonstante a enthält, wann immer A die Individuenvariable x enthält. Beispiel:

A :	Rxab → Fx
A(n/x):	Rnab → Fn

> Definition 9.15 (Einsetzungsinstanz eines quantifizierten Satzes):
>
> Wenn A ein Satz von PL ist mit der Form $(\forall x)B$ oder $(\exists x)B$ und a eine Individuenkonstante, dann ist $B(a/x)$ eine **Einsetzungsinstanz** von A. Dabei ist die Konstante a die instantiierende Konstante.

Beispiele: ‚Fa', ‚Fb' oder ‚Fc' sind Einsetzungsinstanzen von ‚(∃w)Fw'.

<u>Bildung einer Einsetzungsinstanz:</u>

Bei der Bildung einer Einsetzungsinstanz eines quantifizierten Satzes lassen wir den Anfangsquantor (!) fallen und ersetzen alle (!) verbleibenden Vorkommnisse der Variable, die dieser Quantor enthält, durch eine bestimmten Konstante.

Beispiel 1: (∀y)(∃z)Ryz

Einsetzungsinstanzen:	(∃z)Raz
	(∃z)Rgz
	(∃z)Rbz
keine Einsetzungsinst.:	Rab

Beispiel 2: $(\exists w)[Gwa \leftrightarrow (\exists x)(Hwx \wedge \neg Ix)]$

Einsetzungsinstanzen:

$Gaa \leftrightarrow (\exists x)(Hax \wedge \neg Ix)$
$Gba \leftrightarrow (\exists x)(Hbx \wedge \neg Ix)$
$Gca \leftrightarrow (\exists x)(Hcx \wedge \neg Ix)$

keine Einsetzungsinst.:

$Gda \leftrightarrow (\exists x)(Hex \wedge \neg Ix)$

<<<