10. PRÄDIKATENLOGIK:

SYMBOLISIERUNG

10.1 Sätze geringer Komplexität
10.2 A-, I-, E-, O-Sätze
10.3 Sätze größerer Komplexität
10.4 Symbolisierung in PLI

10.1 Sätze geringer Komplexität

Das UD für die Symbolisierungen in 10.1 ist die Menge aller Menschen.

10.1.1 Einfache Sätze ohne Quantoren

Satz (D): *J*ean-Paul wird von *S*imone *v*ergöttert.
Symbolisierung (PL): Vjs
(Vxy: x wird von y vergöttert.)

10.1.2 Zusammengesetzte Sätze ohne Quantoren

Satz (D): Wenn *F*riedrich *C*osima *v*erehrt, dann wird *R*ichard Cosima von Friedrich fern*h*alten.
Symbolisierung (PL): $Vfc \rightarrow Hrcf$

10.1.3 Sätze mit einem einzigen Quantor

Satz (D): *J*ean-Paul liebt etwas
Symbolisierung (PL): $(\exists x)Ljx$

Satz (D): Alle lieben sich selbst
Symbolisierung (PL): $(\forall x)Lxx$

10.1.4 Zusammengesetzte Sätze mit mehreren nicht überlappenden Quantoren

Satz (D): Britney liebt alle aber nicht alle lieben Britney
Symbolisierung (PL): $(\forall y)Lby \wedge \neg(\forall x)\, Lxb$

10.2 A-, I-, E-, O-Sätze

In diesem Abschnitt wollen wir die Symbolisierung von Sätzen der folgenden vier Typen behandeln.

Alle As sind Bs.	(Satztyp: A-Satz)
Kein A ist ein B.	(Satztyp: E-Satz)
Einige As sind Bs.	(Satztyp: I-Satz)
Einige As sind keine Bs.	(Satztyp: O-Satz)

‚A' und ‚B' werden hier als Variablen für allgemeine Terme (also Prädikate) benutzt. In der Aristotelischen Logik sind alle syllogistischen Argumente aus Sätzen dieser vier Typen zusammengesetzt (siehe Kapitel 1). Die Benennung dieser Satztypen als A-, I-, E-, O-Sätze erfolgte im Mittelalter. Keiner dieser Satztypen lässt sich in einer der bisher behandelten Symbolisierungsformen wiedergeben.

Wichtig: Wenn nicht anders angegeben, wollen wir in den Beispielsätzen dieses Abschnittes und in den folgenden Abschnitten die Menge aller Dinge (z.B. Menschen, Zahlen, Autos usw.) als Individuenbereich (d.h. als UD) betrachten!

10.2.1 Die Symbolisierung von A-Sätzen

Beispielsatz: Alle Menschen sind sterblich

Fehlsymbolisierungen: $(\forall x)Mx \wedge (\forall x)Sx$

Für alle Dinge im UD gilt: sie sind Menschen; und für alle Dinge im UD gilt: sie sind sterblich.

Mit anderen Worten: Alle Dinge (aus UD) sind Menschen und alle Dinge sind sterblich.

$(\forall x)(Mx \wedge Sx)$

Für alle Dinge im UD gilt: sie sind Menschen und sie sind sterblich.

Mit anderen Worten: Alle Dinge (aus UD) sind Menschen und sterblich.

Diese beiden Symbolisierungen sind äquivalent. Beide sind inadäquat, weil der Individuenbereich auch Dinge enthält, die weder Menschen noch sterblich sind.

Eine korrekte Symbolisierung: $(\forall x)(Mx \rightarrow Sx)$

Für alle Dinge im UD gilt: wenn sie Menschen sind, dann sind sie sterblich.

Anders ausgedrückt: Für alle Dinge (aus UD) gilt, dass sie sterblich sind, wenn sie Menschen sind.

A-Sätze sind **universelle** Aussagen. Sie sagen von *jedem Ding*, das zur Diskussion steht, dass, wenn es von der Sorte *A* ist, es dann auch von der Sorte *B* ist.

Deutsche Sätze, die sich gleichermaßen als A-Sätze symbolisieren lassen sind:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Alle Zahlen sind abstrakt.}\\ \text{Jede Zahl ist abstrakt.}\\ \text{Jede einzelne Zahl ist abstrakt.}\\ \text{Zahlen sind abstrakt.}\\ \text{Eine Zahl ist etwas Abstraktes.}\end{array}\right\} (\forall z)(Zz \rightarrow Az)$$

10.2.2 Die Symbolisierung von E-Sätzen

Beispielsatz: Kein Junggeselle ist verheiratet.

Eine Fehlsymbolisierung: $\neg(\forall y)(Jy \rightarrow Vy)$

Es ist nicht der Fall, dass für alle Dinge im UD gilt: wenn sie Junggesellen sind, dann sind sie verheiratet.

Etwas weniger umständlich ausgedrückt:
Nicht alle Dinge sind verheiratet, wenn sie Junggesellen sind.

Diese Symbolisierung ist inkorrekt, da sie nur behauptet, dass es Junggesellen gibt, die unverheiratet sind und damit den Fall zulässt, dass es verheiratete Junggesellen gibt. (Sie können sich davon später anhand der Äquivalenzen in Abschnitt 10.2.6 überzeugen.)

Eine korrekte Symbolisierung: $(\forall y)(Jy \rightarrow \neg Vy)$

Für alle Dinge im UD gilt: wenn sie Junggesellen sind, dann sind sie nicht verheiratet.

Mit anderen Worten: Alle Dinge sind nicht verheiratet, wenn sie Junggesellen sind.

E-Sätze sind ebenso wie A-Sätze **universelle** Aussagen. Sie sagen von *jedem Ding*, das zur Diskussion steht, aus, dass, wenn es von der Sorte *A* ist, es *nicht* von der Sorte *B* ist.

Deutsche Sätze, die sich als E-Sätze symbolisieren lassen:

Kein Vogel ist ein Säugetier. Vögel sind keine Säugetiere. Ein Vogel (als solcher) ist kein Säugetier.	$(\forall x)(Vx \rightarrow \neg Sx)$

(Im letzten Satz ist der Artikel natürlich unbestimmt.)

10.2.3 Die Symbolisierung von I-Sätzen

Beispielsatz: Einige Zahlen sind Primzahlen.

Fehlsymbolisierung: $(\exists y)Zy \wedge (\exists y)Py$

Es gibt mindestens ein Ding im UD für das gilt: es ist eine Zahl; und es gibt mindestens ein Ding im UD (nicht notwendigerweise dasselbe) für das gilt: es ist eine Primzahl.

Mit anderen Worten: Mindestens ein Ding (aus UD) ist eine Zahl und mindestens ein Ding ist eine Primzahl. Oder: Es gibt Dinge, die Zahlen sind und es gibt Dinge, die Primzahlen sind.

Diese Symbolisierung ist inkorrekt, da der Beispielsatz ausdrücken will, dass es Dinge gibt, die sowohl Zahlen als auch Primzahlen sind.

Korrekte Symbolisierung: $(\exists y)(Zy \wedge Py)$

Es gibt mindestens ein Ding im UD für das gilt: es ist eine Zahl und es ist eine Primzahl.

Anders ausgedrückt: Es gibt mindestens ein Ding, das sowohl eine Zahl als such eine Primzahl ist.

I- Sätze von PL sind **Existenz-**Aussagen. Sie stellen keine Behauptung über jedes Ding in UD auf, sondern sie sagen, dass *mindestens ein Ding* im UD die Bedingung $A \wedge B$ erfüllt. Es ist zu beachten, dass I-Sätze nicht ein bestimmtes Ding der Sorte *A* identifizieren und davon aussagen, dass es in *B* ist. I-Sätze sagen, dass es *A*s gibt, die *B*s sind, aber nicht, welche Dinge in UD es sind.

Deutsche Sätze, die sich als I-Sätze symbolisieren lassen:

Einige Insekten sind Blutsauger. Mindestens ein Insekt ist ein Blutsauger. Es gibt blutsaugende Insekten. Es existiert etwas, das ein blutsaugendes Insekt ist.	$(\exists x)(Ix \wedge Bx)$

10.2.4 Die Symbolisierung von O-Sätzen

Beispielsatz: Einige Hunde sind keine Jagdhunde

Eine Fehlsymbolisierung: $\neg(\exists w)(Hw \wedge Jw)$

Es ist nicht der Fall, dass es im UD mindestens ein Ding gibt für das gilt: es ist ein Hund und es ist ein Jagdhund.

Mit anderen Worten: Es ist nicht der Fall, dass es etwas gibt, das sowohl ein Hund als auch ein Jagdhund ist.

Diese Symbolisierung ist inadäquat, da sie die Existenz von Jagdhunden ausschließt, was falsch ist.

Eine korrekte Symbolisierung: $(\exists w)(Hw \wedge \neg Jw)$

Es gibt im UD mindestens ein Ding für das gilt: es ist ein Hund und es ist nicht ein Jagdhund.

Anders ausgedrückt: Es gibt etwas, dass ein Hund aber kein Jagdhund ist.

O- Sätze von PL sind wie I-Sätze **Existenz-**Aussagen. Sie sagen, dass sich im Individuenbereich *mindestens ein* Ding befindet, das die Bedingung $A \wedge \neg B$ erfüllt.

Deutsche Sätze, die sich als O-Sätze symbolisieren lassen:

Einige Säugetiere sind keine Blutsauger
Mindestens ein Säugetier ist kein Blutsauger.
Es gibt Säugetiere, die keine Blutsauger sind.
Es existiert ein Säugetier, das kein Blutsauger ist.

$(\exists z)(Sx \wedge \neg Bx)$

10.2.5 A-,E-,I-,O-Satzschemata

Beobachtung: In Symbolisierungen von A-, E-, I-, O-Sätzen erstreckt sich der Bereich des Quantors sich über den gesamten Satz.

Wenn wir ‚*A*' und ‚*B*' als Variablen für Formeln, die die Variable *x* enthalten, benutzen, dann können wir das folgende Schema verwenden, um die Sätze der vier Typen (als Sätze von PL) darzustellen:

A: $(\forall x)(A \to B)$

E: $(\forall x)(A \to \neg B)$

I: $(\exists x)(A \wedge B)$

O: $(\exists x)(A \wedge \neg B)$

10.2.6 Beispiele für Symbolisierungen von A-, E-, I-, O-Sätzen

Symbolisierungsschlüssel:

UD:	Die Teilnehmer am Sprachkurs „Akkadisch II“
Mxy:	x mag y
Lx :	x ist lässig
Gxy:	x ist gestresster als y
h:	Heiko
m:	Mark
r:	Rut
s:	Sandy

Satz (D):	Jeder, den Mark mag, ist nicht lässig.
Symbolisierung (PL):	$(\forall x)(Mmx \rightarrow \neg Lx)$

Satz (D):	Jeder der gestresster ist als Rut, ist gestresster als Heiko.
Symbolisierung (PL):	$(\forall z)(Gzr \rightarrow Gzh)$

Satz (D):	Niemand, der Mark mag, mag Heiko.
Paraphrase (D):	Es ist nicht der Fall, dass es etwas gibt, das Mark mag und das Heiko mag.
Symbolisierung (PL):	$\neg(\exists x)(Mxm \wedge Mxh)$

<u>Bemerkung zur Wahl des Individuenbereichs:</u>

Wenn der Individuenbereich nur aus den Teilnehmern an Akkadisch II besteht, dann ist ‚$(\forall y)My$’, eine geeignete Symbolisierung von ‚Alle Teilnehmer sind Menschen’. Aber diese Symbolisierung ist inadäquat, wenn der Individuenbereich aus den Teilnehmern und den Stühlen besteht auf denen sie sitzen; wir wollen nämlich sagen, dass die Teilnehmer Menschen sind, aber nicht die Stühle. Somit benötigen wir eine Symbolisierung wie ‚$(\forall y)(Ty \rightarrow My)$’ (wobei Tx: x ist ein Teilnehmer).

Wenn der Individuenbereich stark eingeschränkt ist und wir jedem oder mindestens einem Element des Universums eine Eigenschaft zuweisen oder absprechen wollen, können A-, E-, I- und O-Sätze wie folgt spezifiziert werden, wobei *A* eine atomare Formel sein kann:

A: $(\forall x)A$

E: $(\forall x)\neg A$

I: $(\exists x)A$

O: $(\exists x)\neg A$

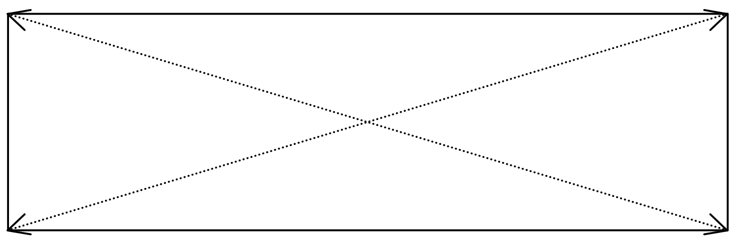
10.2.6 Logische Beziehungen zwischen A-, E-, I- und O-Sätzen

Nach Aristoteles bestehen zwischen A-, E-, I- und O-Sätzen einige logische Beziehungen. Diese Beziehungen wurden von seinen Tradenten im sog. „Viereck der Gegensätze“ dargestellt.

<u>Das Viereck der Gegensätze:</u>

A-Satz
$(\forall x)(A \rightarrow B)$

E-Satz
$(\forall x)(A \rightarrow \neg B)$



I-Satz
$(\exists x)(A \wedge B)$

O-Satz
$(\exists x)(A \wedge \neg B)$

<u>Kontradiktionsbeziehungen:</u>

Wenn ein A-Satz wahr ist, dann ist der korrespondierende O-Satz falsch (und umgekehrt). Wenn ein E-Satz wahr ist, dann ist der korrespondierende I-Satz falsch (und umgekehrt). Die Sätze, die durch die gestrichelten Pfeile verbunden sind, stehen in einer **kontradiktorischen Beziehung** zueinender: Wenn der eine von beiden wahr ist, ist der andere falsch.

<u>Äquivalenzbeziehungen:</u>

Somit ist jeder Satz im Viereck der Gegensätze mit der Negation des Satzes **äquivalent**, der sich am andern Ende des diagonalen gestrichelten Pfeils befindet. Wir erhalten vier Äquivalenz-Paare:

$(\forall x)(A \rightarrow B)$ und $\neg(\exists x)(A \wedge \neg B)$

$(\forall x)(A \rightarrow \neg B)$ und $\neg(\exists x)(A \wedge B)$

$(\exists x)(A \wedge B)$ und $\neg(\forall x)(A \rightarrow \neg B)$

$(\exists x)(A \wedge \neg B)$ und $\neg(\forall x)(A \rightarrow B)$

Somit sind A-Sätze mit Negationen von O-Sätzen äquivalent (und umgekehrt) und E-Sätze mit Negationen von I-Sätzen (und umgekehrt).

Beispiel: UD: Menschen
Gx: x ist ein Philosoph
Sx: x ist ein Logiker

Satz (D)	Symbolisierungen (PL)
A-Satz: Alle Philosophen sind Logiker.	$(\forall x)(Px \rightarrow Lx)$ oder $\neg(\exists x)(Px \wedge \neg Lx)$
E-Satz: Kein Philosoph ist ein Logiker.	$(\forall x)(Px \rightarrow \neg Lx)$ oder $\neg(\exists x)(Px \wedge Lx)$
I-Satz: Einige Philosophen sind Logiker.	$(\exists x)(Px \wedge Lx)$ oder $\neg(\forall x)(Px \rightarrow \neg Lx)$
O-Satz: Einige Philosophen sind keine Logiker.	$(\exists x)(Px \wedge \neg Lx)$ oder $\neg(\forall x)(Px \rightarrow Lx)$

Implikationsbeziehungen:

Folgende Implikationsbeziehungen gelten in PL **nicht**:

- Wenn ein A-Satz wahr ist (z.B. ‚Alle Philosophen sind Logiker'), dann ist auch der korrespondierende I-Satz wahr (z.B. ‚Einige Philosophen sind Logiker').

- Wenn ein E-Satz wahr ist (z.B. ‚Kein Philosoph ist ein Logiker'), dann ist auch der korrespondierende O-Satz wahr (z.B. ‚Einige Philosophen sind keine Logiker').

Das klingt zwar etwas kontraintuitiv, lässt sich aber wie folgt begründen: In PL sind Prädikate zugelassen, die von keinem Element des Individuenbereichs erfüllt werden (d. h. Prädikate, die keine Extension haben; mehr dazu in Kapitel 11). Hierzu ein Beispiel:

UD: Lebewesen, Sx: x ist ein Schlumpf, Bx: x ist blau.

Alle Schlümpfe sind blau.	$(\forall x)(Sx \rightarrow Bx)$
Es gibt mindestens einen Schlumpf, der blau ist.	$(\exists x)(Sx \wedge Bx)$

Ein solcher Schluss wäre ungültig, da er uns von einer wahren Prämisse zu einer falschen Konklusion führt. Schlümpfe gibt es in Wirklichkeit aber nicht.[1] Die Prämisse legt uns nicht

[1] Die übliche Interpretation des Existenzquantors ist objektuell bzw. referentiell. Ein existenzquantifizierter Satz kann nur wahr sein, wenn es im festgelegten Individuenbereich ein Individuum gibt, das die Prädikate, die in

auf die Existenz von Schlümpfen fest. Sie sagt von allen Dingen, die im Individuenbereich enthalten sind, dass sie blau sind, wenn sie Schlümpfe sind. Diese Aussage ist aber auch dann wahr, wenn der Individuenbereich z.B. nur Autos und Hunde enthält. (Ein korrespondierendes Konditional, das die Prämisse als Vordersatz hätte und die Konklusion als Hintersatz wird falsch.)

Entsprechend läßt sich dafür argumentieren, dass es nicht der Fall ist, dass E-Sätze O-Sätze implizieren. (Aristoteles selbst nahm an, dass beide Implikationsbeziehungen gelten.)

Eine geeignete Strategie, Diskussionen darüber zu vermeiden, was es gibt und was nicht besteht darin, den Individuenbereich UD nicht einfach als „Menge aller Dinge“ anzugeben, sondern ihn einzuschränken. Wird UD etwa als die Menge aller Menschen bestimmt, dann gibt es nach eben dieser Festlegung keine Schlümpfe. Themen der Existenz und des Wesens von (fiktionalen) Entitäten werden in Kursen zur Metaphysik behandelt und können hier nicht diskutiert werden.

Konträr und subkonträr

Aristoteles behauptete zudem dass:

- A- und E-Sätze **konträr** sind
  (d. h., ein A-Satz und der ihm entsprechende E-Satz können nicht beide wahr sein)
- I- und O-Sätze **subkonträr** sind
  (d. h. ein I-Satz und der ihm entsprechende O-Satz können nicht beide falsch sein)

Keine dieser Beziehungen gilt in PL. Der Grund ist erneut der, dass wir in PL Prädikate zulassen, die von keinem Element des Individuenbereichs (UD) erfüllt werden. Wenn es also keine Dinge im Individuenbereich gibt, die von der Sorte sind, die durch das einstellige Prädikat ‚Sx’ (z.B. für ‚x ist ein Schlumpf’) spezifiziert wird, dann sind

- der I-Satz ‚$(\exists x)(Sx \wedge Bx)$’ und der ihm entsprechende O-Satz ‚$(\exists x)(Sx \wedge \neg Bx)$’ falsch

  und somit (aus Gründen der Äquivalenz)

- der A-Satz ‚$(\forall x)(Sx \rightarrow Bx)$’ und der ihm entsprechende E-Satz ‚$(\forall x)(Sx \rightarrow \neg Bx)$’ wahr.

dem betreffenden existenzquantifizierten Satz vorkommen erfüllt. (Genaueres dazu in Kapitel 11.) Die objektuelle Interpretation der Quantoren liegt W. v. O. Quine’s Doktrin von der ontologischen Verpflichtung (*ontological commitment*) zugrunde. Hierzu eine griffige Passage: „entities of a given sort are assumed by a theory if and only if some of them must be counted among the values of the variables, in order that the statements affirmed in the theory be true.“ (*From a Logical Point of View*, 1953, S. 103). Die Kernaussage dieser Lehre hat Quine in einem bekannten Slogan ausgedrückt: „to be is to be the value of a variable“. Es gibt natürlich alternative Interpretationen der Quantoren, z.B. die substitutionelle auf die wir hier aber nicht eingehen.

10.3 Sätze größerer Komplexität

10.3.1 Komplexere A-, E-, I-, O-Sätze

Die Formeln *A* und *B* in A-, E-, I-, O-Sätzen, d. h. Sätzen der Form,

$(\forall x)(A \rightarrow B)$
$(\forall x)(A \rightarrow \neg B)$
$(\exists x)(A \wedge B)$
$(\exists x)(A \wedge \neg B)$

können selbst beliebige Formeln von PL sein, Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen, materiale Konditionale und materiale Bikonditionale.

1. Mark mag jeden, den sowohl Sandy als auch Rut mag.

   Jedes einzelne (each) Ding ist derart, dass wenn Sandy es mag und Rut es mag, dann mag auch Mark es. (UD: die Menge aller Menschen.)

   $(\forall z)[(Msz \wedge Mrz) \rightarrow Mmz]$

2. *P*udel und *D*ackel *k*läffen, aber *B*ernhardiner kläffen nicht. (UD: Hunde.)

   $[(\forall w)(Pw \rightarrow Kw) \wedge (\forall w)(Dw \rightarrow Kw)] \wedge (\forall w)(Bw \rightarrow \neg Kw)$

   (Konjunktion aus einer Konjunktion aus A-Sätzen und aus einem E-Satz.)

   $(\forall w)[(Pw \vee Dw) \rightarrow Kw] \wedge (\forall w)(Bw \rightarrow \neg Kw)$.

   alternativ:

   $(\forall w)[((Pw \vee Dw) \wedge \neg(Pw \wedge Dw)) \rightarrow Kw] \wedge (\forall w)(Bw \rightarrow \neg Kw)$.

   (Konjunktion aus einem A-Satz und aus einem E-Satz.)

Es folgen zwei Satztypen, bei deren Symbolisierung in PL die Auswahl geeigneter Prädikaten Probleme bereiten kann.

10.3.2 Sätze mit mehreren Adjektiven

Oftmals können deutsche singuläre Kennzeichnungen, die mehrere Adjektive enthalten in PL ausgedrückt werden, indem Prädikate von PL miteinander verknüpft werden.

Ein ein alter, gebrauchter, kaputter, olivgrüner BMW rostet da draußen vor sich hin. (UD: Autos; Dx: steht da draußen.)

$(\exists z)(([(Az \wedge Gz) \wedge (Kz \wedge Oz)] \wedge (Bz \wedge Dz)) \wedge Rz)$

Funktioniert nicht bei ‚Einige Politiker sind alte Hasen'. Einige Politiker sind alt, aber keiner ist ein Hase.

10.3.3 Sätze mit „leeren Prädkaten"

In PL sind Prädikate zugelassen, die von keinem Individuum in einem festgelegten Individuenbereich erfüllt werden müssen.

UD: Lebewesen
Sxy: x sucht nach y
Mx: x ist eine Meerjungfrau
p: Paul

Satz: Paul sucht nach Meerjungfrauen

inkorrekt: $(\exists y)(My \wedge Spy)$

Diese Symbolisierung legt uns aufgrund der Verwendung des Existenzquantors, auf die Annahme der Existenz mindestens einer Meerjungfrau fest. Der zu symbolisierende Satz tut das (vermutlich) nicht. Man kann durchaus nach etwas suchen, das nicht existiert.

inkorrekt: $(\forall y)(My \rightarrow Spy)$

Mit dieser Quantifikation erfolgt (vermutlich) keine ontologische Festlegung. Problem: Die Symbolisierung behauptet, dass etwas, das eine Meerjungfrau ist, derart ist, dass Paul danach sucht. Das ist aber nur eine Charakterisierung dessen, was eine Meerjungfrau ist. Die Symbolisierung ist, auch dann wahr, wenn Paul nicht nach Meerjungfrauen sucht oder sonstetwas macht.

korrekt: Mp

Hier wird also ein 1-stelliges Prädikat (‚Mx' für ‚x sucht nach Meerjungfrauen') verwendet. In Fällen wie diesen wollen wir (der Einfachheit halber) das folgende Strategem befolgen:

Strategem (Prädikate ohne Extension im Individuenbereich „leere Prädikate"):

Wenn der Gegenstand von dem ein *n*-stelliges deutsches Prädikat (mit $n > 1$) ausgesagt wird kein Individuum ist, das sich im ausgewählten Individuenbereich befindet, sollte bei der Symbolisierung in PL ein einstelliges Prädikat von PL verwendet werden.

10.3.4 Mehrere Quantoren mit sich überschneidenden Bereichen

Die Sätze mit mehreren Quantoren, die wir bislang behandelt haben, waren allesamt wahrheitsfunktonale Zusammensetzungen. In keinem der Sätze fiel ein Quantor in den Bereich eines anderen Quantors. Im folgenden behandeln wir Sätze deren Symbolisierungen in PL mehrere Quantoren mit sich „überschneidenden" Bereichen enthalten.

<u>Paare von Quantoren</u>

Es gibt vier Kombinationen, in denen Paare von Quantoren erscheinen können:

$(\exists x)(\exists y) \ldots$	Es gibt ein x und es gibt ein y derart, dass . . .
$(\forall x)(\forall y) \ldots$	Für jedes x und für jedes y . . .
$(\forall x)(\exists y) \ldots$	Für jedes x gibt es ein y derart, dass . . .
$(\exists x)(\forall y) \ldots$	Es gibt ein x derart, dass für jedes y . . .

Wenn wir eine Abfolge von Quantoren haben, wobei alle Existenzquantoren oder Allquantoren sind, dann spielt die Reihenfolge, in der sie vorkommen keine Rolle. Aber das ist nicht der Fall, wenn wir eine gemischte Quantifikation haben, d. h. mindestens einen Allquantor und mindestens einen Existenzquantor. Die obigen Paarungen erlauben, eine ganze Reihe deutscher Sätze in PL auszudrücken, die sich ohne eine Überschneidung der Quantoren nicht wiedergeben lassen.

Beispiele: UD : die Menschen, die im Kanzleramt tätig sind
Bxy : x beneidet y

1 Jeder beneidet jeden
$(\forall x)(\forall y)Bxy$

2 Jemand beneidet jemanden
$(\exists x)(\exists y)Bxy$

3 Jeder beneidet jemanden
$(\forall x)(\exists y)Bxy$

4 Jemand beneidet jeden
$(\exists x)(\forall y)Bxy$

Symbolisierungen von 1-4 einschließlich zweier weiterer Sätze bei einem erweiterten Individuenbereich:

UD: Lebewesen
Px: x ist eine Person
Bxy: x beneidet y

1´ Jeder beneidet jeden.
$(\forall x)(\forall y)[(Px \wedge Py) \rightarrow Bxy]$ alternativ: $(\forall x)[Px \rightarrow (\forall y)(Py \rightarrow Bxy)]$

2´ Jemand beneidet jemanden.
$(\exists x)(\exists y)[(Px \wedge Py) \wedge Bxy]$ alternativ : $(\exists x)[Px \wedge (\exists y)(Py \wedge Bxy)]$

3´ Jeder beneidet jemanden.
$(\forall x)[Px \rightarrow (\exists y)(Py \wedge Bxy)]$

4´ Jemand beneidet jeden.
$(\exists x)(Px \wedge (\forall y)(Py \rightarrow Bxy)]$

5´ Jeder wird von jemandem beneidet.
$(\forall x)[Px \rightarrow (\exists y)(Py \wedge Byx)]$

6´ Jemand wird von jedem beneidet.
$(\exists x)(Px \wedge (\forall y)(Py \rightarrow Byx)]$

<u>Lektüreübung zu den obigen Symbolisierungen:</u>

1´ Für jedes x und für jedes y gilt, <u>wenn</u> x eine Person ist <u>und</u> y eine Person ist, <u>dann</u> beneidet x y.

4´ <u>Es gibt mindestens ein</u> Ding x derart, dass x eine Person ist <u>und</u> jedes Ding y ist derart, dass <u>wenn</u> y eine Person ist, <u>dann</u> beneidet x y.

5´ <u>Jedes</u> Ding x ist derart, dass <u>wenn</u> x eine Person ist, <u>dann</u> <u>gibt es ein</u> y derart, dass y eine Person ist <u>und</u> y beneidet x.

Beispiele:

Symbolisierungsschlüssel:

UD:	Alles
Bxy:	x beneidet y
Vxy:	x versteht y
Px:	x ist eine Person

1. Niemand versteht alles.

<u>Jedes</u> y ist derart, dass <u>wenn</u> y eine Peson ist, <u>dann</u> versteht y <u>nicht</u> alles.

$(\forall y)(Py \rightarrow \neg(\forall z)Vyz)$

2. Jemand, der etwas versteht, wird von jemandem beneidet.

<u>Jedes</u> x ist derart, dass <u>wenn</u> x eine Person ist <u>und</u> <u>es mindestens ein</u> y gibt, derart, dass x y versteht, <u>dann</u> <u>gibt es ein</u> z derart dass z eine Person ist <u>und</u> z x beneidet.

$(\forall x)((Px \wedge (\exists y)Vxy) \rightarrow (\exists z)(Pz \wedge Bzx))$

3. Jemand, der alles versteht, wird von jedem beneidet.

Jedes x ist derart, dass wenn x eine Person ist und jedes y derart ist, dass x y versteht, dann ist jedes z derart, dass wenn z eine Person ist, dann beneidet z x.

$(\forall x)[(Px \wedge (\forall y)Vxy) \rightarrow (\forall z)(Pz \rightarrow Bzx)]$

10.4 Symbolisierung in PLI

10.4.1 Identität

Die Standardinterpretation von ‚einige', d. h. von ‚$(\exists x)$' ist ‚mindestens ein'. Diese Interpretation ist etwas kontraintuitiv. Wenn uns jemand sagen würde, dass es mindestens einen Keks in der Dose gibt, würden wir vermutlich etwas irritiert gucken, wenn wir in die Dose schauen und nur einen Keks darin fänden. Wir würden wohl mindestens zwei Kekse erwarten.

In PL lassen sich solche Ausdrücke wie ‚mindestens zwei', ‚genau ein', ‚genau zwei', die einzige' und andere Ausdrücke, die etwas präzisere Quantitätsangaben machen ausdrücken, wenn ein 2-stelliges Prädikat von PL (z.B. Ixy) dazu bestimmt wird, die Identitätsrelation auszudrücken. Es ist aber praktischer der Sprache PL ein eigenes 2-stelliges Prädikat hinzuzufügen, nämlich ‚=', von dem festgelegt wird, dass es sich in allen Symbolisierungen stets auf die Identitätsrelation bezieht.[2] (Wir führen entsprechend ‚$\neq$' für die Relation der Nichtidentität ein.) Die resultierende Sprache nennen wir ‚PLI'. (Diese Strategie erlaubt uns, den Prädikatbuchstaben ‚I' nach bedarf unterschiedlich zu interpretieren.)

Symbolisierungsschlüssel 1:

UD:	Alles
Exy:	x ist in y enthalten
Kx:	x ist ein Keks
k:	die Keksdose von Oma Käthe

1. Es ist mindestens ein Keks in der Keksdose

$(\exists x)(Kx \wedge Exk)$

2. Es sind mindestens zwei Kekse in der Keksdose

‚Es gibt ein x und es gibt ein y derart, dass x und y Kekse sind, x und y in der Keksdose sind und dass x und y nicht identisch sind'.

$(\exists x)(\exists y)([(Kx \wedge Ky) \wedge (Exk \wedge Eyk)] \wedge x \neq y)$

[2] Zu den Eigenschaften dieser Relation siehe unten Abschnitt 9.4.2.

3. Es ist genau ein Keks in der Keksdose.

Es gibt ein y derart, dass y ein Keks ist und y in der Keksdose ist, und jedes (each) Ding z ist derart, dass wenn z ein Keks ist und in der Keksdose ist, dann ist z identisch mit y.

$(\exists y)[(Ky \wedge Eyk) \wedge (\forall z)[(Kz \wedge Ezk) \rightarrow y = z]]$

Folgendes ist zu beachten: Die Verwendung verschiedener Variablen (wie hier ‚y' und ‚z') verpflichtet uns nicht, anzunehmen, dass es im Individuenbereich mehr als ein Ding der spezifizierten Sorte (hier Kekse) gibt. Das wird am obigen Beispiel deutlich.

Nur zur Wiederholung: Wenn der zweite Quantor im obigen Satz von PL ebenfalls ein y wäre, dann wäre er kein Satz von PL, ja er wäre nicht mal eine Formel von PL (vgl. Abschnitt 9.6.4).

4. Es sind mindestens drei Kekse in der Keksdose.

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(([(Kx \wedge Ky) \wedge Kz] \wedge [(Exk \wedge Eyk) \wedge Ezk])$
$\wedge [(x \neq y \wedge\ y \neq z) \wedge\ x \neq z])$

10.4.2 Sätze mit singulären Kennzeichnungen

Bislang haben wir der Bequemlichkeit halber für die Symbolisierung von singulären Termen (d. h. Eigennamen und singulärer Kennzeichnungen) Individuenkonstanten von PL benutzt (z.B. ‚die Keksdose von Oma Käthe'). Das ist aber—wie angedeutet worden ist—nicht adäquat. Es gibt nämlich Argumente, deren Gültigkeit von der internen Struktur singulärer Kennzeichnungen abhängig ist. So ist z.B. das folgende Argument intuitiv gültig, wird aber ungültig, wenn die singuläre Kennzeichnung mit einer Individuenkonstante wiedergegeben wird.

Der römische Feldherr, der Pompeius besiegt hat, ist sowohl in Gallien als auch in Germanien einmarschiert.

Pompeius wurde von jemandem besiegt, der sowohl in Gallien als auch in Germanien einmarschiert ist.

Symbolisierung 1:

Symbolisierungsschlüssel:

UD:	Personen und Regionen
Exy:	x ist in y einmarschiert
Bxy:	x hat y besiegt
r:	**der römische Feldherr, der Pompeius besiegt hat**
p:	Pompeius
g:	Gallien
e:	Germanien

Symbolisierung:

$$\frac{Erg \wedge Ere}{(\exists x)[Bxp \wedge (Exg \wedge Exe)]}$$

ndg

Diese Symbolisierung sagt nicht, dass das Ding, das in Gallien und in Germanien einmarschiert ist ein Ding ist, das Pompeius besiegt hat (was die Konklusion behauptet). Sie sagt auch nicht, dass ein ganz bestimmtes Ding gemeint ist.

Symbolisierung 2:

Die Prämisse des deutschen Arguments lässt sich wie folgt paraphrasieren, wenn die singuläre Kennzeichnung weiter aufgespalten wird:

Rx:	x ist römisch
Fx:	x ist ein Feldherr

Es gibt genau ein Ding, das ein römischer Feldherr ist und das Pompeius besiegt hat, und dieses Ding ist in Gallien und in Germanien einmarschiert.

$$(\exists x)[[((Rx \wedge Fx) \wedge Bxp) \wedge (\forall y)[((Ry \wedge Fy) \wedge Byp) \rightarrow y = x]] \wedge (Exg \wedge Exe)]$$

Die singuläre Kennzeichnung wird hier also in eine singuläre Existenzaussage umgewandelt. Diese Strategie geht auf Bertrand Russell (1872-1970) (‘On denoting’, 1905) zurück. Eigennamen hingegen lassen sich nicht in singuläre Existenzaussagen überführen.

Symbolisierung:

$$\frac{(\exists x)[[(Rx \wedge Bxp) \wedge (\forall y)[((Ry \wedge Fy) \wedge Byp) \rightarrow y = x]] \wedge (Exg \wedge Exe)]}{(\exists x)[Bxp \wedge (Exg \wedge Exe)]}$$

dg

Sätze mit leeren singulären Kennzeichnungen:

Die Russellsche Strategie erlaubt natürlich auch, deutschsprachige singuläre Kennzeichnungen, die de facto nichts bezeichnen, zu symbolisieren.

Beispiel:

UD:	Personen und Regionen
Kxy:	x ist der König von y
Gx:	x ist glatzköpfig
f:	Frankreich

Satz:	Der (gegenwärtige) König von Frankreich ist glatzköpfig.
Symbolisierung (PLI):	$(\exists x)((Kxf \wedge (\forall y)(Kyf \rightarrow y = x)) \wedge Gx)$

Der Satz von PLI (ist nach Russell) falsch, da es keine derartige Person gibt. Dieser Satz ist dann weder sinnlos, noch ohne einen Wahrheitswert.

10.4.3 Zu den Eigenschaften der Identitätsrelation

Wenn x, y und z Variablen von PL oder von PLI sind und A ein zweistelliges Prädikat von PL oder von PLI, dann sagt

- das Schema 1, dass A eine reflexive Relation repräsentiert,
- das Schema 2, dass A eine transitive Relation repräsentiert,
- das Schema 3, dass A eine symmetrische Relation repräsentiert.

Schema 1 (reflexiv): $(\forall x)Axx$
Schema 2 (transitiv): $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((Axy \wedge Ayz) \rightarrow Axz)$
Schema 3 (symmetrisch): $(\forall x)(\forall y)(Axy \rightarrow Ayx)$

Die Identitätsrelation ist reflexiv, transitiv und symmetrisch; sie ist somit eine Äquivalenzrelation.

Beispiele:

Transitive Relationsprädikate:	Relationsprädikate, die nicht transitiv sind:
x ist größer als y	x ist ein Freund von y
x ist ein Vorfahre von y	x ist die Mutter von y
x ist schwerer als y	x zeugt y

Symmetrische Relationsprädikate:	Relationsprädikate, die nicht symmetrisch sind:
x ist ein Geschwister von y	x ist eine Schwester von y
x ist ein/e Klassenkammerad/in von y	x ist der Chef von y
x ist verheiratet mit y	x ist verliebt in y

Reflexiv:

In einem uneingeschränkten Individuenbereich ist es schwer, andere reflexive Relationen als die Identitätsrelation ausfindig zu machen.

x ist gleichschwer mit y
x ist gleichfarbig mit y

Die entsprechenden Relationen sind dann nicht reflexiv, da z.B. die Zahl 2 nicht gleichschwer (oder gleichfarbig) mit sich selbst ist. Zahlen haben (wenn es sie denn gibt) kein Gewicht (oder keine Farbe). Sie werden aber zu reflexiven Relationen, wenn der Individuenbereich in geeigneter Weise eingeschränkt wird. Wenn er nur aus Menschen besteht, dann sind die beiden Relationen reflexiv.